47. Milyen felület? $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=?$

a) $\vec r=(x_0+a_1u+b_1v)\,\underline{i}+(y_0+a_2u+b_2v)\,\underline{j}+(z_0+a_3u+b_3v)\,\underline{k}$

b) $\vec r= au\cos v\,\underline{i}+bu\sin v\,\underline{j}+u^2\,\underline{k}$

c) $\vec r= a\sin u\cos v\,\underline{i}+b\sin u\sin v\,\underline{j}+c\cos u\,\underline{k}$

d) $\vec r=(a+b\cos u)\sin v\,\underline{i}+(a+b\cos u)\cos v\,\underline{j}+b\sin u\,\underline{k}$ $(0<b<a)$

e) $\vec r=(u+v)\,\underline{i}+(u^2+v^2)\,\underline{j}+(u^3+v^3)\,\underline{k}$

f) $\vec r=(u+v)\,\underline{i}+(u-v)\,\underline{j}+4v^2\,\underline{k}$

g) $\vec r=(u\cos v)\,\underline{i}+u\sin v\,\underline{j}+f(u)\,\underline{k}$

h) $\vec r=u\,\underline{i}+a\sin v\,\underline{j}+a\cos v\,\underline{k}$

48. Mekkora az S felszín, ha S-et

a) $x^2+y^2=2x$ vágja ki $x^2+y^2=z^2$ felső feléből

b) $x^2+y^2+z^2=1$ vágja ki $x+y+z=6$-ból

c) S az $x^2+y^2=z^2$-nek a $z=0$ és az $x^2+y^2+z^2=2ax$ közötti darabja

d) S az $x^2+y^2=z^2$-nek a $z=0$ és az $x+2z=3$ közötti darabja

e) S az ~~$x^2+y^2=2ay$~~ $x^2+z^2=2ay$-nak $y=a$ előtti része

49. S a $z=f(x,y)$, $(x,y)\in T$ felület, $\bar n$ a normálisa felfelé $(\bar n_z>0)$ Biz:

($\vec F$ vektor) $\iint_S \vec F\cdot\vec n\,dS=\iint_T\left(-P\frac{\partial f}{\partial x}-Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\right)dx\,dy$

(φ skalár) $\iint_S \varphi\,dS=\iint_T \varphi\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

(50) S: $x^2+y^2=2x$ vágja ki $x^2+y^2=z^2$-ből

$$\iint_S (x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\,dS = ?$$

(51) S: $x^2+y^2+z^2=1$ vágja ki $x+y+z=6$-ból

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2 & \text{a gömbön belül}\\ 0 & \text{kívül}\end{cases}$$

$$\iint_S \varphi\, dS = ?$$

(52) S: $x^2+y^2+z^2=1$ gömb $x+y+z\geq 1$ része

$\vec{F}=(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})\times(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k})$. $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = ?$

(53) S az egységgömb. $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = ?$

a) $\vec{v}=2x\underline{i}+2y\underline{j}+2z\underline{k}$

b) $\vec{v}=x^3\underline{i}+y^3\underline{j}+z^3\underline{k}$

(54) S_1 és S_2 két felület, a határgörbéjük közös.

Biz. $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

a) Gauss-tétellel

b) Stokes-tétellel

(55) $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = ?$

a) $\vec{F}=y^2\underline{i}+xy\underline{j}+xz\underline{k}$, S: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$

b) $\vec{F}=y\underline{i}+z\underline{j}+x\underline{k}$, S: $z=1-x^2-y^2$, $z\geq 0$

c) $\vec{F}=(y-z)\underline{i}+yz\underline{j}+xz\underline{k}$, S: a $0\leq x,y,z\leq 2$ kocka azon 5 lapja, ami nem az xy-sík

56 a) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = ?$ C az $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ metszete

b) $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)\,dz = ?$ C az $x^2+y^2=2y$ és az $y=z$ metszete

c) $\int_C y^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz = ?$ C mint b)-ben

d) $\int_C (y-z)dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = ?$
C az $x^2+y^2=a^2$ és az $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ metszete

e) $\int (y^2-x^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz = ?$
C a $0 \le x,y,z \le a$ kocka és az $x+y+z=\frac{3a}{2}$ metszete.

57 Legyen u és v két sima skalármező egy nyílt tartományon.
a) Biz. van olyan F vektor, $\nabla u \times \nabla v = \operatorname{rot} \vec{F}$
b) Lehet-e ez az F a $\nabla(uv)$, $u\nabla v$, $v\nabla u$ valamelyike?
c) Legyen $u(x,y,z) = x^3-y^3+z^2$ $v(x,y,z) = x+y+z$
és S az $x^2+y^2+z^2=1$, $z \ge 0$ félgömb.
$\iint_S (\nabla u \times \nabla v)\cdot \vec{n}\, dS = ?$

58 Az S felszín a V térfogat határa
Biz.
a) $\iint_S (f\nabla g)\cdot \bar{n}\, dS = \iiint_V (f\nabla^2 g + \nabla f \nabla g)\,dx\,dy\,dz$
b) $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\bar{n}\, dS = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dx\,dy\,dz$

(59) $\frac{\partial f}{\partial n}$ az f skalár $\vec{n}$ szerinti iránymenti deriváltja, az S felszín a V térfogat határa, a szereplő deriváltak folytonosak. Biz.

a) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_V \nabla^2 f \; dx\,dy\,dz$

b) $\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dS = \iiint_V (f \nabla^2 g + \nabla f \nabla g)\, dx\,dy\,dz$

(v.ö. 58/a!)

c) $\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n}\, dS$, ha f és g harmonikusak

d) $\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n}\, dS = \iiint_V |\nabla f|^2 \, dx\,dy\,dz$, ha f harmonikus

(60) $\nabla^2 f(P) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$

ahol S(t) és V(t) a P pont körüli t sugarú gömb felszíne és térfogata.