II

Alk. anal 2/1

(26) Lehet-e $\underline{v}$ = grad f? Ha igen, mi az f?

$\underline{r} = (x, y, z)$ $\qquad \underline{v} = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2y^2)$

$\underline{v} = (y^2\cos x + z^3, \ -4 + 2y\sin x, \ 3xz^2 + 2)$

(27) Legyen $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

és $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Bizt. a) $\vec{F}$ sima a nyílt összefüggő S-en

b) $P'_y = Q'_x$ S-en

c) F-nek van potenciálja minden S-beli nyílt téglán

d) Az $\int P\,dx + Q\,dy$ útfüggetlen az $A := \{(x,y) \in S, y \geq 0\}$

és $B := \{(x,y) \in S, y \leq 0\}$ halmazokon. Mi a potenciál fv.?

(28) $\vec{F}$ egy folyt. diffható vektortér, $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, összefüggő

a) rot $\vec{F} = 0$ S-en mindenütt

b) $\vec{F}$ egy skalártér gradiense S-en

c) $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = 0$ minden egyszerű, zárt, szakaszonként sima G-re

d) $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$ útfüggetlen S-en

Melyik állításból következik a másik?

(29) $\vec{F} = (y-z, z-x, x-y)$ C: $x^2+y^2+z^2 = a^2$ és
$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$ metszete

$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = ?$

(30) $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$ C: $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2 = ax$
metszete $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = ?$

(31) $\vec{F} = (y, z, x)$ a) C: $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$, $x+y=2$
metszete

$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = ?$ b) C: $x^2+y^2=1$, $z = xy$ metszete

(32) $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folyt. diff.ható-k egy, az
$R: x^2+y^2 \leq 1$ -et tart. nyílt halmazon.
Legyen $\vec{F} := (v, u)$, $\vec{g} := \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$
$\iint_R \vec{F} \cdot \vec{g}\, dx\, dy = ?$ Tudjuk, hogy a határon
$u(x,y) = 1$ és $v(x,y) = y$

(33) u és v simák, D-t a C szakaszonként sima
görbe határolja. Biz.

a) $\oint_C uv\, dx + uv\, dy = \iint_D v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$

b) $\frac{1}{2}\oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy =$
$= \iint_D u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)\, dx\, dy$

(34) $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int \vec{F} \cdot \underline{t}\, ds$, ahol $\underline{t}$ egy érintő egységvektor. Legyen a görbe normális egységvektora $\underline{n}$, és az f skalártérre $\frac{\partial f}{\partial \underline{n}} = \nabla f \cdot \underline{n}$ az iránymenti derivált. Bizi

a) Ha $\vec{F} = (Q, -P) \Rightarrow \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \vec{F} \cdot \underline{n}\, ds$

b) $\oint_C \frac{\partial g}{\partial \underline{n}}\, ds = \iint_D \nabla^2 g\, dx\,dy$

c) $\oint_C f \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{n}}\, ds = \iint_D \left(f \cdot \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dx\,dy$

d) $\oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial \underline{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \underline{n}}\right) ds = \iint_D \left(f \nabla^2 g - g \nabla^2 f\right) dx\,dy$

$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

e) Ha f és g harmonikusak $(\nabla^2 f = 0, \nabla^2 g = 0)$, akkor

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial \underline{n}}\, ds = \oint_C g \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{n}}\, ds$$

(35) Legyen P és Q ugyanaz, mint (27)-ben, C egy zárt görbe S-ben. Mik az $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ lehetséges értékei?

(36) Legyen $\vec{F} = \left(\frac{\partial \log r}{\partial x}, -\frac{\partial \log r}{\partial y}\right)$, ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$, C egy sima zárt görbe az $1 \le x^2+y^2 < 25$ gyűrűben. Mik az $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ lehetséges értékei?

(37) Bizonyítsa be:

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) = \lambda \operatorname{div} \vec{F} + \mu \operatorname{div} \vec{G}$$
$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{F} + \mu \operatorname{rot} \vec{G}$$
$$\operatorname{div}(\varphi \vec{F}) = \varphi \operatorname{div} \vec{F} + \nabla\varphi \cdot \vec{F}$$
$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{F}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{F} + \nabla\varphi \times \vec{F}$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

(38) Határozza meg $\operatorname{div} \vec{F}$, $\operatorname{rot} \vec{F}$-et, ha

$F = (x^2+yz,\ y^2+xz,\ z^2+xy)$
$F = (z+\sin y,\ -z+x\cos y,\ 0)$
$F = (e^{xy},\ \cos xy,\ \cos xz^2)$
$F = (x^2\sin y,\ y^2\sin xz,\ xy\sin(\cos z))$

(39) Legyen $\operatorname{rot} \vec{F} = c\cdot\vec{G}$ és $\operatorname{rot} \vec{G} = c\cdot\vec{F}$ $(c \neq 0)$

a) Bizonyítsa be: $\operatorname{div} F = \operatorname{div} G = 0$ és F, G kielégítik az

$$\nabla^2 \vec{v} + c^2 \vec{v} = 0$$ egyenletet

b) Ha $\vec{A}$ egy olyan vektor, amelyre $\nabla^2 A + c^2 A = \operatorname{grad}\varphi$ egy sima φ skalárra, akkor
$\vec{F} = c\cdot\operatorname{rot}\vec{A}$ és $\vec{G} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$ ilyen.

c) Ha u és v két megoldása $\nabla^2 w + c^2 w = 0$-nak
(u, v skalárok!) akkor
$$\vec{F} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\cdot\vec{r}) + c\operatorname{rot}(v\cdot\vec{r})$$ és
$$\vec{G} = c\operatorname{rot}(u\cdot\vec{r}) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\cdot\vec{r})$$ ilyen.

(40) $F = (y^2z^2, z^2x^2, x^2y^2)$ Biz $\vec{F} \circ \operatorname{rot} \vec{F} = 0$
Keressünk μ-t, amelyre $\mu \vec{F}$ egy gradiens.

(41) Keressünk $\vec{F}$-et, ~~any~~ amelyre

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (2, 1, 3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (y - z, z - x, x - y)$$

(42) Biz Ha $\vec{F}$ és $\vec{g}$ örvénymentesek, akkor $\vec{F} \times \vec{g}$ forrásmentes (pontosabban, $\vec{F} \times \vec{g} = \operatorname{rot} \underline{v}$)

(43) ? $n \in \mathbb{N}$-re lesz $r^n \cdot \vec{r} = \operatorname{rot} \vec{F}$?
($\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$)
Adjunk meg $\vec{F}$-et (egy téglán, amiben nincs benne 0)

(44) Milyen folytonosan ~~$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$~~ diff.ható $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre lesz $f(r) \cdot \vec{r} = \operatorname{rot} \vec{F}$ (valamilyen $\vec{F}$-re?)

(45) Legyen $\underline{v}$ folyt. diffható egy téglán.
a) $\operatorname{rot} \underline{v} = 0$ és $\underline{v} = \operatorname{rot} \underline{u}$ (valamely más $\underline{u}$-ra)
b) van olyan φ skalártér, hogy $\underline{v} = \operatorname{grad} \varphi$ és $\nabla^2 \varphi = 0$ (a téglán mindenütt)
Igaz-e, hogy a) $\Rightarrow$ b)? Igaz-e, hogy b) $\Rightarrow$ a)?

(46) $\vec{F} = (x^3y, y^2z, z^2x)$ Keressünk $\underline{u}, \underline{v}$ vektorokat úgy, hogy $\underline{u}$ egy rotáció, $\underline{v}$ egy gradiens és $\vec{F} = \underline{u} + \underline{v}$