I.

(1) Hat. meg $f(x,y) := x\sin^2(xy)$ $T := [0,\pi]\times[0,\pi]$ fölötti átlagát.

(2) A $[0,1]\times[0,1]$-en $\rho(x,y) := e^{x+y}$ a tömegsűrűség. Hol van a tömegközéppont?

(3) Az $x^2+y^2+z^2=1$ gömb $x^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1$ ellipszis fölötti darabjának felszíne $=?$

(4) $z^2=x^2+y^2$ felület $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\le 1$ részének felszíne $=?$

(5) $x^2+z^2\le 1$ és $x^2+y^2\le 1$ metszetének felszíne $=?$

(6) a) $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = ?$ D: $x^2+y^2\le a^2$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = ?$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx = ?$

c) $\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = ?$ D: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $1\le x^2+y^2\le 4$

(7) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = ?$ $D := [1,2]\times[1,4]$, $f(x,y) := \begin{cases} (x+y)^{-2}, & \text{ha } x\le y\le 2x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

(8) Biz-:

$$\int_0^a \left(\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\,dx\right) dy = \int_0^a (a-x)\, e^{m(a-x)} f(x)\,dx$$

$(a>0$, m áll.) (f folytonos).

9) Lineáris trafóval hat. meg:

$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dx\,dy$ D egy paralelogramma, aminek csúcsai

$(\pi,0), (2\pi,\pi), (\pi,2\pi), (0,\pi)$

10) $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ a) $J(u,v) = ?$

b) $u-v$ síkon az $(1,1), (2,1), (2,3), (1,3)$ téglalap képe mi az $x-y$ síkon?

c) alk. a trafót: $\iint_D xy\,dx\,dy$. D: ~~$x^2+y^2\le 1$~~ $x^2+2y^2 \le 1$

11) $I(p,r) := \iint_D \frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p} = ?$ D: $x^2+y^2 \le r^2$

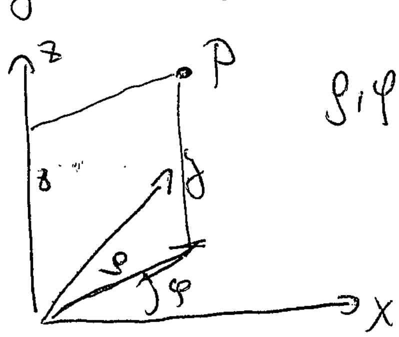
$\lim_{r\to\infty} I(p,r) = ?$

12) Milyen transzformációval lesz

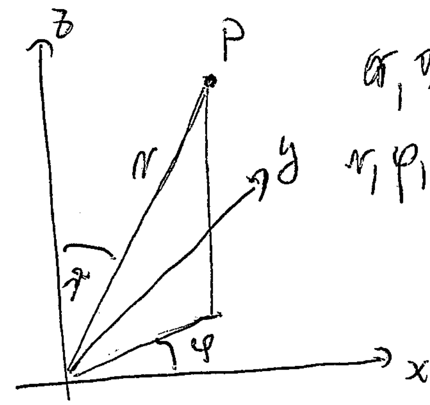
a) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} f(u)\,du$ D: $|x|+|y| \le 1$

b) $\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du$ D: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ határolják

13) Henger és gömbi polárkoordináták



ρ, φ, z



r, φ, ϑ

a) Kapcsolat az x,y,z-vel?

b) Jacobi-det = ?

(14) $\iiint_D z^2x^2 + z^2y^2 \, dx\,dy\,dz = ?$, D: $x^2+y^2 \le 1$, $-1 \le z \le 1$

(15) $\iiint_D e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx\,dy\,dz = ?$, D az egységgömb

(16) a) $r = 2a\cos\vartheta$, $z = r$; $z = 0$ Határolt térfogat $= ?$

b) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x^2+y^2$ — " — $= ?$

c) $y = x^2$, $y = x+2$, $4z = x^2+y^2$, $z = x+y$ — " — $= ?$

(17) a) $\iiint_D z e^{x^2+y^2} \, dx\,dy\,dz = ?$ D: $x^2+y^2 \le 4$, $2 \le z \le 3$

b) $\iiint_D x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz = ?$ D: $x^2+y^2 \le 2$, $-2 \le z \le 3$

c) $\iiint_D \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = ?$ D: $x^2+y^2+z^2 \le 1$

d) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \, dx\,dy\,dz = ?$ $a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$

e) $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} \, dy\,dx = ?$

f) $\iint_D \cos\dfrac{x-y}{x+y} \, dx\,dy = ?$ D: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 1$

g) $\iiint_D x^2+y^2 \, dx\,dy\,dz = ?$ D: $x^2+y^2 = 2z$, $z = 2$

h) $\iiint_D dx\,dy\,dz = ?$ D: $z = x^2+y^2$, $x+y = z$

(18) $\iint_D \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$ D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$

b) $\iiint_D \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{8}{15} a^2b^2c^2 \frac{(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

(D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$) Ellenőrizzük az eredményt speciális esetekben (pl $a=b=c$)!

(19) Hogyan határozható meg a súlypont?

a) $y=x^2$, $x+y=2$ által határolt idom súlypontja?

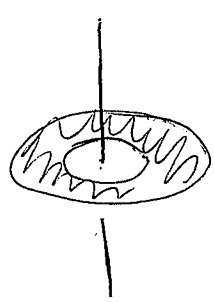
b) $y=\sin x$, $y=0$, $0 \le x \le \pi$ #

(20) A z tengelyre von. tehetetlenségi nyomaték

$I_z = \iiint_T \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, ahol T egy test és ρ a tömegsűrűsége

a) $\rho=$ áll, és a test: $z \ge 0$, $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=a^2$ határolják.
$I_z = ?$

b)



Mekkora egy homogén vékony $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$ gyűrű teh. nyomatéka a ⊥ólt (szimm) tengelyre?

(21) Gravitációs potenciál:

$$V(x_1, y_1, z_1) := -\gamma \iiint_V \frac{\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$ V egy térfogat

itt γ egy állandó ($6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$), ρ a tömegsűrűség

Adjuk meg a gravitációs potenciált:

a) homogén gömb

b) homogén $r_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq r_2^2$ gömbréteg (kívül - belül!)

c) egy d vastagságú végtelen síklap (d kicsi)

d) egy homogén R sugarú gömb, amiben van egy R' sugarú üreg

e) egy bolygó, amelynek sűrűsége

$$\rho(r) = \begin{cases} 3 \cdot 10^5 / r, & \text{ha } 10^5 \leq r \leq 5 \cdot 10^8 \quad (\text{cm}) \\ 3, & \text{ha } r \leq 10^5 \quad (\text{cm}) \end{cases}$$

~~[illegible]~~)

(22) Egy test: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $0 \leq z \leq px+qy+r$

Biz.: Térfogat = (alaplap területe) x (függ. élek átlaga)

(23) Biz. $\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d f'_x(x,y)\,dx\,dy$

(itt f, f'_x folytonosak az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapon)

(24) Biz: $\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

(Green-formula) Itt P és Q simák, a C görbe a D tartomány határa

(25) Alkalmazzuk a formulát,

a) $\int_C (y^4+x^3)\,dx + 2x^6\,dy = ?$ C az egységnégyzet kerülete

b) C egy egysz. zárt görbe, Biz

határolt terület $= \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$

Alk. ezt a formulát körre, ellipszisre

c) $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$ $0 \le \varphi \le 2\pi$ területe $= ?$