

Alkalmazott analízis, 2013. 11. 28.

1. Határozza meg az $f(t) := e^{-a|t|}$ ($a > 0$) függvény Fourier-transzformáltját. Számolja ki az

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{a^2 + x^2} dx$$

integrált. (8 pont)

2. Határozza meg \widehat{f} ismeretében a $t \cdot f(t)$ Fourier-transzformáltját. Az 1. feladat megoldását felhasználva adja meg a $g(t) := te^{-|t|}$ Fourier-transzformáltját. (5 pont)

3. Igazolja, hogy az integrálható függvények kalapot tudnak cserélni, azaz $f, g \in L(\mathbb{R})$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x) dx.$$

(Honnan tudjuk, hogy ezek az integrálok egyáltalán léteznek?) (6 pont)

4. Igazolja, hogy

$$\text{ha } f(t) = \int_t^{\infty} \frac{g(x)}{x} dx, \text{ akkor } F(p) = \frac{1}{p} \int_0^p G(y) dy,$$

ahol F és G az f, g függvények Laplace-transzformáltja. (8 pont)

5. Oldja meg az

$$y' + z = t, \quad z' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1$$

differenciálegyenlet-rendszert Laplace-transzformációval. (10 pont)

6. A. Mondjon ki egy tételt arról, hogy az inverz Fourier-transzformáció hogyan állítja elő a függvényt.

B. Mit jelent az, hogy az f függvény az a helyen Lipschitz-feltételnek tesz eleget? Mit tud a különböző rendű Lipschitz-feltételek, a folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolatáról? (4 + 5 pont)

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!