

Alkalmazott analízis, 2013. 10. 31.

1. A „dipólust” úgy kaptuk, hogy az origóba és a $(0, 0, -d)$ pontba tettünk két ellentétes előjelű $(+Q, -Q)$ töltést, majd vettük a $d \rightarrow 0$ limest, de úgy, hogy ezenközben $Q \cdot d =: p$ állandó (lásd ábra). Azt kaptuk, hogy a keltett potenciál $U = K \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2}$, ahol K egy konstans, $r = |\vec{r}|$ az origótól mért távolság és ϑ az \vec{r} és a z tengely szöge. Készítsünk (axiális) kvadrupólust úgy, hogy az origóba és a $(0, 0, -d)$ pontba teszünk két ellentétes irányítású momentumú $(+p, -p)$ dipólust, majd vegyük a $d \rightarrow 0$ limest, úgy, hogy ezenközben $p \cdot d =: p_2$ állandó maradjon. Határozza meg a kvadrupólus által keltett potenciált. (8 pont)

2. Legyen $f \in L^2$ egy 2π -periodikus függvény. Igazolja, hogy vannak olyan g_e és g_o függvények, hogy $f = g_e + g_o$, valamint g_e páros és g_o páratlan. Igazolja, hogy

$$\|f\|^2 = \|g_e\|^2 + \|g_o\|^2,$$

ahol $\|\cdot\|$ az L^2 -norma. Értelmezze az eredményt mint egy Pitagorasz-tételt. (6 pont)

3. Tekintsük az $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ de.-et. Bizonyítsa a következőket:

a) $H_n(x) := e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ megoldása az egyenletnek és n -edfokú polinom;

b) $H_{n+1}(x) = -2nH_{n-1} - 2xH_n(x)$. (5+5 pont)

4. Legyen $f(x) := x^2$, ha $|x| \leq \pi$ és $f(x + 2\pi) = f(x)$. Határozza meg a függvény Fourier-sorát. Határozza meg a $\sum \frac{1}{n^4}$ sor összegét. (8 pont)

5. A. Definiálja az *ortonormált rendszer* fogalmát. Mit ért az alatt, hogy az ONR *teljes*?

B. Definiálja az általános ONR szerinti Fourier-sor fogalmát. Mit tud a konvergenciájáról?

C. Definiálja az L és az L^2 függvényosztályokat. Mit tud a kapcsolatukról? (4+4+4 pont)

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!