Alkalmazott analízis, 2013. 10. 03.

1. Számolja ki az alábbi integrálokat:

$$\text{a)}\quad \iiint_V \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{b)}\quad \int_0^1\int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\,dy\,dx$$

az a) részben V az egységgömb. (A gömbi polár trafó Jacobi-determinánsa $-r^2\sin\theta$.) $(5+5$ pont)

2. Tekintsünk egy egyenes kúpot: magassága m, alapkörének sugara R, csúcsa az origó, tengelye az 'x' tengely, Adja meg az S palástfelszín egy $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ paraméteres előállítását (a paramétertartományt is), és az $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$ vektort. (6 pont)

3. Legyen az S zárt felület egy test határa, $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ pedig harmonikus függvények. Igazolja, hogy

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}\,dS = \iint_S g\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\,dS$$

(ahol $\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}$ a felület normálvektora szerinti derivált). (8 pont)

4. Legyen $\varphi(x,y,z) := f(r)$, ahol $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ síma függvény. Igazolja, hogy

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = f'' + \frac{2}{r}f'\,.$$

Milyen f esetén lesz $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$? (8 pont)

5. Számolja ki az

$$\oint_C (y^4+x^3)\,dx + 2x^6\,dy$$

integrált, ahol C a $0\le x,y\le 1$ négyzet kerülete pozitív irányítással. (5 pont)

6. A) Mondja ki a Stokes tételt.

B) Definiálja vektorfüggvény *felszín szerinti integrálja* fogalmát. $(4+4$ pont)

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!