Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

2. ZH — 2012. május 7.

ζ csoport

---

1. Feladat. (6 pont)

1. Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterének bázisa nulla elemű. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Válaszát indokolja!
2. Adjon meg egy olyan 2×2-es mátrixot, melynek sajátértéke a 3, és nem tartalmaz nullát!

Megoldás:

1. A nulla elemű bázis azt jelenti, hogy a megoldásaltér nulla-dimenziós, ami azt jelenti, hogy nincs szabadismeretlen. Mivel nincs szabadismeretlen, így végtelen sok megoldás nem lehet, de mivel a csupa nulla vektor mindig megoldás, így 1 darab megoldása van az egyenletrendszernek.
2. Keressük a megoldást $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ alakban. (Az a-n kívüli nemnulla paramétereket véletlen választottam.) Ha a 3 sajátérték, akkor a $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = -2a + 6 + 2$ determinánsnak nullának kell lennie. Ebből jön, hogy $a = 4$ esetben a mátrixnak pont sajátértéke a 3.

---

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg a következő mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 7 \\ -3 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

3. Feladat. (6 pont) Adjon meg egy bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterében!

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$(x_3 + 2x_4;\ x_3 + 3x_4;\ x_3;\ x_4)\,,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Bázis: $(1, 1, 1, 0)\,;\ (2, 3, 0, 1)$

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, és adja meg az egyik sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát!

Megoldás: $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 3.$

$$U_{-4} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right], \qquad U_3 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

---

5. Feladat. (6 pont) Oldja meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -15+8a & -3+8b \\ 26-12a & 4-12b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

---

6. Feladat. (6 pont) Mely p valós számok esetén lesz az

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ p & 0,6 \end{pmatrix}$$

ráfordítási mátrixú gazdaság működőképes? Adjon meg egy olyan árrendszert (árvektort) $p = 0,1$ esetén, mellyel az össztermelést figyelembe véve $+9$ a nyereség és az első termék ára nagyobb a piacon, mint a másodiké!

Megoldás: A pontosan akkor működőképes, ha $0 \leq p < \frac{4}{5}$. A lehetséges $v = (a, b)$ árvektorok a következők: $0 < b < 15$, és $a = 30 - b$. Tehát egy példa: $v = (20, 10)$.

---

7. Feladat. (6 pont) Határozza meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & p-1 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 2p & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\text{Rang} = \begin{cases} 2, & \text{ha } p = 1, \\ 4, & \text{ha } p \neq 1. \end{cases}$$

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

2. ZH — 2012. május 7.

η csoport

---

1. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, és adja meg az egyik sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát!

Megoldás: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7.$

$$U_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right], \qquad U_7 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

---

2. Feladat. (6 pont) Adjon meg egy bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterében!

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$(-x_2 + x_4;\ x_2;\ 3x_2 + x_4;\ x_4),\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Bázis: $(1, 0, 1, 1)\,;\ (-1, 1, 3, 0)$

---

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg a következő mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -8 & 12 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4. Feladat. (6 pont) Oldja meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -7 + 6a & 5 + 6b \\ -10 + 8b & 7 + 8b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

---

5. Feladat. (6 pont) Határozza meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően!

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & p & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2p+1 & 0 \\ -1 & -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\text{Rang} = \begin{cases} 2, & \text{ha } p = -1, \\ 4, & \text{ha } p \neq -1. \end{cases}$$

---

6. Feladat. (6 pont) Mely x valós számok esetén lesz az

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ x & 0,7 \end{pmatrix}$$

ráfordítási mátrixú gazdaság működőképes? Adjon meg egy olyan árrendszert (árvektort) $x = 0,1$ esetén, mellyel az össztermelést figyelembe véve $+8$ a nyereség és a második termék ára nagyobb a piacon, mint az elsőé!

Megoldás: A pontosan akkor működőképes, ha $0 \leq x < \frac{2}{5}$. A lehetséges $v = (a, b)$ árvektorok a következők: $20 < b < 40$, és $a = 40 - b$. Tehát egy példa: $v = (10, 30)$.

---

7. Feladat. (6 pont)

1. Adjon meg egy olyan 2×2-es mátrixot, melynek csak 1 darab valós sajátértéke van.
2. Ha egy 10 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere 4-dimenziós, akkor mennyi az egyenletrendszer bővített mátrixának a rangja? Válaszát indokolja!

Megoldás:

1. Gondoljunk a trianguláris mátrixokra. Például a $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -213 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ mátrixnak csak 1 darab valós sajátértéke van, a $\sqrt{2}$.
2. Mivel a megoldásaltér 4 dimenziós, ez azt jelenti, hogy 4 darab szabadismeretlen van az általános megoldásában. A maradék 6 ismeretlen kötött, őket bázistranszformációval be tudtuk vinni a bázisba. A bővített mátrix rangját ugyanezzel a bázistranszformációval számolnánk, ami azt jelenti, hogy 6 vektor tudnánk bevinni a bázisba. Tehát a bővített mátrix rangja 6.
