Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

2. ZH — 2012. május 7.

η csoport

---

1. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, és adja meg az egyik sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát!

Megoldás: A sajátértékek kiszámíthatók a karakterisztikus polinom gyökeiként:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 \\ &= 0 \iff \lambda \in \{2, 7\} \end{aligned}$$

A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó v sajátvektorokat az $(A - 2E)\,v = \underline{0}$ mátrixegyenlet megoldásaként kapjuk.

$$\begin{array}{c|cc|c} & v_1 & v_2 & \\ \hline e_1 & 3 & -1^* & 0 \\ e_2 & -6 & 2 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|c|c} & v_1 & \\ \hline v_2 & -3 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|c|c} & v_1 & \\ \hline v_2 & -3 & 0 \end{array}$$

Ebből következik, hogy $v_2 = 3v_1$. Ebben a megoldásaltérben megadva egy bázist, megkapjuk a sajátaltér egy generátorrendszerét:

$$v_1 := 1 \implies v_2 = 3 \quad U_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$$

Hasonlóan megkapható, hogy

$$U_7 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

---

2. Feladat. (6 pont) Adjon meg egy bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterében!

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline e_1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ e_2 & -3 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ e_3 & 0 & -3 & 1^* & -1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_4 & \\ \hline e_1 & 2^* & 2 & -2 & 0 \\ e_2 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ x_3 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|cc|c} & x_2 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & -3 & -1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|cc|c} & x_2 & x_4 & \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 \\ x_3 & -3 & -1 & 0 \end{array}$$

Az x_2 és x_4 szabadismeretlen, és az x_1 és x_3 kötött ismeretlen. Továbbá $x_1 = -x_2 + x_4$ és $x_3 = 3x_2 + x_4$. Így az egyenletrendszer általános megoldása:

$$(-x_2 + x_4;\ x_2;\ 3x_2 + x_4;\ x_4)\,,\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

A bázis megadásához a szabadismeretlenek helyére úgy helyettesítünk 1-eseket, hogy a többi szabismeretlent 0-nak választjuk.

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_4 & \implies & x_1 & x_3 \\ 1 & 0 & & -1 & 3 \\ 0 & 1 & & 1 & 1 \end{array}$$

Így egy bázis: $(-1, 1, 3, 0)\,;\ (1, 0, 1, 1)\,.$

---

3. Feladat. (5 pont) Határozza meg a következő mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline e_1 & -2 & -1 & 3 \\ e_2 & -3 & -1 & 2 \\ e_3 & 4 & 1^* & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & x_1 & e_3 & x_3 \\ \hline e_1 & 2 & 1 & 3 \\ e_2 & 1^* & 1 & 2 \\ x_2 & 4 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_2 & e_3 & x_3 \\ \hline e_1 & -2 & -1 & -1^* \\ x_1 & 1 & 1 & 2 \\ x_2 & -4 & -3 & -8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_2 & e_3 & e_1 \\ \hline x_3 & 2 & 1 & -1 \\ x_1 & -3 & -1 & 2 \\ x_2 & 12 & 5 & -8 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline x_1 & 2 & -3 & -1 \\ x_2 & -8 & 12 & 5 \\ x_3 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

A mátrix inverze $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -8 & 12 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

4. Feladat. (6 pont) Oldja meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline e_1 & 4 & -2 & 1^* & 4 & -3 \\ e_2 & -2 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|cc} & x_1 & x_2 & & \\ \hline x_3 & 4 & -2 & 4 & -3 \\ e_2 & 6 & -1^* & 7 & -5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|cc} & x_1 & & \\ \hline x_3 & -8 & -10 & 7 \\ x_2 & -6 & -7 & 5 \end{array}$$

Ebből következik, hogy az $x_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ „szabad ismeretlenvektor”, és

$$\begin{aligned} x_3 &= (-10, 7) + 8(a, b) = (-10 + 8a, 7 + 8b), \\ x_2 &= (-7, 5) + 6(a, b) = (-7 + 6a, 5 + 6b). \end{aligned}$$

Ezt összerakva kapjuk az általános megoldást:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -7 + 6a & 5 + 6b \\ -10 + 8a & 7 + 8b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

---

5. Feladat. (6 pont) Határozza meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően!

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & p & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2p+1 & 0 \\ -1 & -7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1^* & 5 & 2 & -1 \\ e_2 & -1 & p & 0 & -1 \\ e_3 & -1 & -3 & 2p+1 & 0 \\ e_4 & -1 & -7 & -3 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 5 & 2 & -1 \\ e_2 & p+5 & 2 & -2 \\ e_3 & 2 & 2p+3 & -1 \\ e_4 & -2 & -1 & 1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 3 & 1 \\ e_2 & p+1 & 0 \\ e_3 & 0 & 2p+2 \\ v_4 & -2 & -1 \end{array}$$

$$p \neq -1 \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 3 & 1 \\ e_2 & p+1^* & 0 \\ e_3 & 0 & 2p+2 \\ v_4 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} & v_3 \\ \hline v_1 & 1 \\ v_2 & 0 \\ e_3 & 2(p+1)^* \\ v_4 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c||} \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

$$
p=-1 \rightarrow \begin{array}{c|cc}
 & v_2 & v_3 \\ \hline
v_1 & 3 & 1 \\
e_2 & 0 & 0 \\
e_3 & 0 & 0 \\
v_4 & -2 & -1
\end{array}
$$

Ha $p=-1$,akkor a mátrix rangja 2, minden más érték esetén a rang 4.

---

6. Feladat. (6 pont) Mely x valós számok esetén lesz az

$$
A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ x & 0,7 \end{pmatrix}
$$

ráfordítási mátrixú gazdaság működőképes? Adjon meg egy olyan árrendszert (árvektort) $x=0,1$ esetén, mellyel az össztermelést figyelembe véve +8 a nyereség és a második termék ára nagyobb a piacon, mint az elsőé!

Megoldás: A működőképesség vizsgálatához meg kell vizsgálni a Leontyev-inverzet.

$$
(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -x & 0,3 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ x & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{0,3}{0,24-0,6x} & \frac{0,6}{0,24-0,6x} \\ \frac{x}{0,24-0,6x} & \frac{0,8}{0,24-0,6x} \end{pmatrix}
$$

A gazdaság pontosan akkor működőképes, ha a Leontyev-inverz minden eleme nemnegatív. Ez pedig akkor teljesül, ha $0,24-0,6x>0$ és $x\geq 0$. Az első egyenlőtlenséget átalakítva: $x<0,4$. Tehát A pontosan akkor működőképes, ha $0\leq x<\frac{2}{5}$.

Keressük az árvektort $v=(a,b)$ alakban. Ekkor annak kell teljesülnie a feltétel miatt, hogy $0\leq a<b$. Ki kell számolni a kiadást, hogy a profitot is meg tudjuk adni:

$$
vA=(a,b)\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}=(0,2a+0,1b;\ 0,6a+0,7b).
$$

A bevétel maga az árvektor:

$$
v=(a,b).
$$

Az első terméken a nyereség $a-0,2a-0,1b$, a második terméken a nyereség $b-0,6a-0,7b$. Az össztermelés nyeresége ennek a kettőnek az összege, és ezt kell megoldani a-ra és b-re úgy, hogy 8 legyen.

$$
\begin{aligned}
a-0,2a-0,1b+b-0,6a-0,7b &= 8 \\
0,2a+0,2b &= 8 \\
a+b &= 40 \\
a &= 40-b
\end{aligned}
$$

Így a következő feltételnek kell eleget tennünk: $0\leq 40-b<b$. Ebből jön, hogy a lehetséges $v=(a,b)$ árvektorok a következők: $20\leq b<40$, és $a=40-b$. Tehát egy példa: $v=(10,30)$.

---

7. Feladat. (6 pont)

1. Adjon meg egy olyan 2×2-es mátrixot, melynek csak 1 darab valós sajátértéke van.
2. Ha egy 10 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere 4-dimenziós, akkor mennyi az egyenletrendszer bővített mátrixának a rangja? Válaszát indokolja!

Megoldás:

1. Gondoljunk a trianguláris mátrixokra. Például a $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -213 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ mátrixnak csak 1 darab valós sajátértéke van, a $\sqrt{2}$.
2. Mivel a megoldásaltér 4 dimenziós, ez azt jelenti, hogy 4 darab szabadismeretlen van az általános megoldásában. A maradék 6 ismeretlen kötött, őket bázistranszformációval be tudtuk vinni a bázisba. A bővített mátrix rangját ugyanezzel a bázistranszformációval számolnánk, ami azt jelenti, hogy 6 vektor tudnánk bevinni a bázisba. Tehát a bővített mátrix rangja 6.
