Név:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

# Lineáris algebra gyakorlat

*1. ZH* — 2012. március 19.

**V** csoport

---

---

**1. Feladat.** (5 pont) Számolja ki az

$$AB + 2C, \qquad \left(A^T - B\right) C, \qquad BA - C^2$$

mátrixok közül azokat, amelyek léteznek, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}!$$

**Megoldás:**

$$2C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ccc|cc} & & & -2 & 3 \\ & & & -5 & 1 \\ & & & -1 & 4 \\ \hline -1 & 0 & -2 & 4 & -11 \\ 1 & 1 & 3 & -10 & 16 \end{array} \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -10 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{AB + 2C}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -10 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \left(A^T - B\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \Longrightarrow \underline{\underline{\left(A^T - B\right) C}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A $BA$ szorzás elvégezhető, és az eredmény egy $3 \times 3$-as mátrix. A $C^2$ szorzás is elvégezhető, és az eredmény egy $2 \times 2$-es mátrix. A $BA - C^2$ mátrix nem végezhető el, mert csak azonos méretű mátrixok mellett értelmezhető a kivonás.

**2. Feladat.** (6+2 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

1. $(1;\ 3;\ -4)\,,\ (-2;\ -5;\ 7)\,,\ (-1;\ -2;\ 5)\,,\ (1;\ 4;\ -9)$
2. $(1;\ -3;\ 1;\ -1)\,,\ (2;\ -8;\ -2;\ -1)\,,\ (-1;\ 7;\ 7;\ 0)$
3. $(1;\ -1;\ 2)\,,\ (1;\ 0;\ 6)\,,\ (-3;\ 1;\ -12)$

**Megoldás:**

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. sor 2-szeresét hozzáadom a második sorhoz, az 1. sor 1-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz, az 1. sor $(-1)$-szeresét hozzáadom a 4. sorhoz.
(2) : A 2. sor $(-1)$-szeresét hozzáadom a 3. és 4. sorhoz is.
(3) : A 3. sor 2-szeresét hozzáadom a 4. sorhoz.
(4) : A „csupa nulla” sort el kell hagyni.
Rang $= 3 \implies$ Mivel a rang egyenlő a vektorok koordinátáinak számával, ezért a vektorrendszer generátorrendszer. Mivel a rang kevesebb, mint a vektorrendszerbeli vektorok száma, ezért a vektorrendszer lineárisan függő. Lineárisan függő vektorrendszer nem lehet bázis.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & -2 & -1 \\ -1 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang $= 3 \implies$ Mivel a rang nem egyenlő a vektorok koordinátáinak számával, ezért a vektorrendszer nem generátorrendszer. Mivel a rang egyenlő a vektorrendszerbeli vektorok számával, ezért a vektorrendszer lineárisan független. Ha egy vektorrendszer nem generátorrendszer, nem is lehet bázis.

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rang $= 3 \implies$ Mivel a rang egyenlő a vektorok koordinátáinak számával, ezért a vektorrendszer generátorrendszer. Mivel a rang egyenlő a vektorrendszerbeli vektorok számával, ezért a vektorrendszer lineárisan független. A bázis pontosan a lineárisan független generátorrendszerek, így ez a vektorrendszer is bázis.

- Igaz-e a következő állítás: Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő. Válaszát indokolja!
  **Megoldás:** Nem igaz. Ellenpéldával bizonyítható, például az $(1;\,1;\,1)\,,(2;\,2;\,2)$ vektorrendszer lineárisan függő, de bármely valódi részrendszere lineárisan független, mert egy darab nem zérusvektor önmagában mindig lineárisan független.

**3. Feladat.** (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert a $p$ paraméter függvényében! (Hány megoldás van és mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -5 \\ -2x_1 + 3x_2 + (p^2+4)x_3 &= p+2 \end{aligned}$$

**Megoldás:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ -2 & 3 & p^2+4 & p+2 \end{array}\right) \overset{(5)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & p^2 & p \end{array}\right) \overset{(6)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & p+2 \end{array}\right)$$

(5) : Az 1. sor $(-3)$-szorosát hozzáadom a 2. sorhoz, az 1. sor 2-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(6) : A 2. sor $(-1)$-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.

I. eset: Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha van ellentmondó sor. Ellenmondó sor csak az utolsó lehet, pontosan akkor, ha $p^2 - 4 = 0$ és $p + 2 \neq 0$. Ez a két összefüggés csak akkor áll fenn együttesen, ha $p = 2$. Tehát, ha $p = 2$, akkor nincs megoldás.

II. eset: Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ha van szabadismeretlen. Szabadismeretlen csak az $x_3$ lehet, méghozzá pontosan akkor, ha $p^2 - 4 = 0$ és $p + 2 = 0$. Ez a két összefüggés csak akkor áll fenn együttesen, ha $p = -2$. Tehát, ha $p = -2$, akkor végtelen sok megoldás van, és a megoldásokat a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

mátrixból kell megkapni. Mint már láttuk, de a mátrixból is megállapítható, hogy az $x_3$ szabadismeretlen, értéke tetszőleges valós szám lehet, a többi változó tőle függ(het). Az utolsó sorból következik, hogy $x_2 + 4x_3 = -2$, azaz $x_2 = -2 - 4x_3$. Az első sorból következik, hogy $x_1 - x_2 - 2x_3 = -1$, azaz $x_1 = -1 + x_2 + 2x_3$, azaz $x_1 = -1 + (-2 - 4x_3) + 2x_3 = -3 - 2x_3$.

III. eset: Minden más $p$ érték esetén az egyenletrendszernek egy darab megoldása van, ami természetesen függ a $p$ értékétől, és a megoldást a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & p+2 \end{array}\right)$$

mátrixból lehet megkapni. Az utolsó sorból következik, hogy $\left(p^2 - 4\right) x_3 = p+2$, azaz $x_3 = \frac{p+2}{p^2-4} = \frac{1}{p-2}$. A többi sor ugyanazt a megoldást adja mint a II. esetben, de azokban az $x_3$ értéke $\frac{1}{p-2}$ lesz. Tehát $x_2 = -2 - \frac{4}{p-2}$ és $x_1 = -3 - \frac{2}{p-2}$.

Összefoglalva:

$$\begin{cases} (-3 - 2x_3, -2 - 4x_3, x_3)\,, & \text{ha } p = -2 \\ \text{nincs megoldás,} & \text{ha } p = 2 \\ \left(-\frac{3p-4}{p-2}, -\frac{2p}{p-2}, \frac{1}{p-2}\right), & \text{ha } p \notin \{2, -2\} \end{cases}$$

**4. Feladat.** (6+1 pont) Határozza meg a $p$ valós paraméter összes olyan értékét, melyre a következő determináns értéke 42!

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & p \end{vmatrix}$$

**Megoldás:**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & p \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} p & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & p \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} p & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} p+3 & 0 & 1+3p \\ -3 & 0 & 1-2p \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} p+3 & 1+3p \\ -3 & 1-2p \end{vmatrix} \\ &= -\left[(p+3)(1-2p) - (1+3p)(-3)\right] = 2p^2 - 4p - 6 \end{aligned}$$

Tehát a megoldandó egyenlet a következő: $2p^2 - 4p - 6 = 42$. A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva könnyen megkapható, hogy két megoldás van: $p_1 = 6$ és $p_2 = -4$.

- Adjon meg két olyan $2 \times 2$-es mátrixot, melyeknek a determinánsa egyenlő, de csak egyetlen helyen különböznek!
  **Megoldás:** például

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 129 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

**5. Feladat.** (5+3 pont) A $v = (2;\ -1;\ 9)$ vektor eleme-e az $U = [v_1,\ v_2]$ altérnek, ha $v_1 = (1;\ 1;\ 2)$ és $v_2 = (-1;\ 0;\ -3)$?
**Megoldás:** Pontosan akkor eleme a $v$ vektor az $U$ altérnek, ha léteznek olyan $c_1$és $c_2$ valós számok, hogy $v = c_1v_1 + c_2v_2$, azaz $c_1 (1, 1, 2) + c_2 (-1, 0, -3) = (2, -1, 9)$. Ezt koordinátánként kifejtve a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 2 \\ c_1 &= -1 \\ 2c_1 - 3c_2 &= 9. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Mivel a Gauss-elimináció végén ellentmondó sort találunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. Azaz nem létezik megfelelő $c_1$ és $c_2$ konstans. azaz $v$ nem eleme az $U$ altérnek.

- Ha a $v_1, \dots, v_k$ egyenletrendszer rangja $k$ és a $v$ vektor nincs benne az $U = [v_1, \dots, v_k]$ altérben, akkor mennyi a $v_1, \dots, v_k, v$ vektorrendszer rangja?
**Megoldás:** A feltételek szerint szerint a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független. Mivel $v \notin U$, ezért a $v_1, \dots, v_k, v$ vektorrendszer is lineárisan független, tehát a rangja $k + 1$.

**6. Feladat.** (6 pont) Legyen

$$U = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) :\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \text{ és } V = [(1;\ -1;\ 0;\ -3),\ (0;\ 1;\ 2;\ 1)]$$

két altere az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Adja meg a $V$ alteret lineáris egyenletrendszerrel! Teljesül-e az $U = V$ egyenlőség?
**Megoldás:** A $V$ alteret úgy adhatjuk meg egyenletrendszerekkel, hogy megnézzük mely $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vektorok vannak benne a $V$ generált altérben. Hasonlóan kell felírni az egyenletrendszert, mint az előző feladatban, itt már csak a megfelelő bővített mátrixot írom fel.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ -3 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 + 3x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 2(x_2 + x_1) \\ 0 & 0 & x_4 + 3x_1 - (x_2 + x_1) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

Az $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ pontosan akkor eleme a $V$ vektortérnek, ha az előző bővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek van megoldása. Ez pedig azt jelenti, hogy nem lehet benne ellentmondó sor, tehát teljesülni kell a $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ és $2x_1 - x_2 + x_4 = 0$ egyenlőségeknek. Ezzel a két egyenlettel pontosan a $V$ alteret adtuk meg (az első egyenletet megszorozva $(-1)$-gyel):

$$V = \left\{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\right\}.$$

Könnyen látható, hogy ha egy számnégyes teljesíti a $V$ egyenleteit, akkor $U$ egyenletét is teljesíti. Más szóval, ha $v \in V$, akkor $v \in U$, azaz $V \subseteq U$. Az $U = V$ egyenlőség viszont nem teljesül, mert $U \nsubseteq V$, azaz létezik olyan $v$ vektor, melyre $v \in U$, de $v \notin V$. Ellenpéldával igazolható: $(1;\ -1;\ 0;\ 9) \in U$ DE $(1;\ -1;\ 0;\ 9) \notin V$, mert $2 - 1 + 9 \neq 0$. (A konkrét ellenpéldát véletlenül választottam $U$ elemei közül. Tehát ha véletlenül választunk egy elemet, melyre az $U$ egyenlete teljesül, akkor nagy valószínűséggel, a $V$ vektor „másik” egyenlete nem fog teljesülni rá.)