Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

1. ZH — 2012. március 19.

U csoport

---

1. Feladat. (5+1 pont) Számolja ki a

$$2A + BC, \qquad CB - A^2, \qquad A\left(C^T - B\right)$$

mátrixok közül azokat, amelyek léteznek, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}!$$

Megoldás:

$$2A + BC = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad CB - A^2 \text{ nem végezhető el}, \quad A\left(C^T - B\right) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 17 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Adjon példát olyan 2×2-es mátrixra, melynek négyzete az egységmátrix, de ő maga nem az egységmátrix!
  Megoldás: például

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Feladat. (6 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

1. $(1;\ -2;\ 3)\,,\ (1;\ 1;\ 4)\,,\ (-3;\ 0;\ -13)$
2. $(1;\ 5;\ -2)\,,\ (-2;\ -9;\ 6)\,,\ (-1;\ -4;\ 3)\,,\ (1;\ 6;\ 2)$
3. $(1;\ -4;\ 2;\ -3)\,,\ (2;\ -9;\ 0;\ -4)\,,\ (-1;\ 6;\ 6;\ 2)$

Megoldás:

1. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan független, generátorrendszer, bázis.
2. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.
3. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

3. Feladat. (6+2 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert a p paraméter függvényében! (Hány megoldás van és mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + (p^2+7)x_3 &= p - 4 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{cases} (3 + 9x_3, 2 + 5x_3, x_3)\,,\ x_3 \in \mathbb{R}, & \text{ha } p = -1 \\ \text{nincs megoldás}, & \text{ha } p = 1 \\ \left(\frac{3(p+2)}{p-1}, \frac{2p+3}{p-1}, \frac{1}{p-1}\right), & \text{ha } p \notin \{1, -1\} \end{cases}$$

- Igaz-e a következő állítás: Ha egy lineáris egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlen van benne, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. Válaszát indokolja!
  Megoldás: Nem igaz. Ellenpéldával bizonyítható, például az

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \\ -x-y &= -1 \end{aligned}$$

  lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

4. Feladat. (6 pont) Határozza meg az x valós paraméter összes olyan értékét, melyre a következő determináns értéke 42!

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Megoldás: $x \in \{-4, 7\}$.

5. Feladat. (5+3 pont) A $v = (-1;\ 1;\ -4)$ vektor eleme-e az $U = [v_1,\ v_2]$ altérnek, ha $v_1 = (1;\ 1;\ 2)$ és $v_2 = (2;\ 1;\ 5)$?
Megoldás: Igen.

- Ha a $v_1, \dots, v_{10}$ egyenletrendszer rangja 5 és a v vektor benne van az $U = [v_1, \dots, v_{10}]$ altérben, akkor mennyi a $v_1, \dots, v_{10}, v$ vektorrendszer rangja?
  Megoldás: A feltételek szerint szerint a $v_1, \dots, v_{10}$ vektorrendszer lineárisan függő. Mivel $v \in U$, ezért a $v_1, \dots, v_{10}, v$ vektorrendszer is lineárisan függő, tehát a rangja 5.

6. Feladat. (6 pont) Legyen

$$U = [(1;\ 1;\ 0;\ -4)\,,\ (2;\ -1;\ 3;\ 1)] \text{ és } V = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) :\ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

két altere az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Adja meg az U alteret lineáris egyenletrendszerrel! Teljesül-e az $U = V$ egyenlőség?
Megoldás:

$$U = \left\{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\right\}.$$

Az $U = V$ egyenlőség nem teljesül, mert $V \nsubseteq U$. Ellenpéldával igazolható: $(1;\ 1;\ 0;\ 9) \in V$ DE $(1;\ 1;\ 0;\ 9) \notin U$, mert $1 + 3 + 9 \neq 0$.

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

1. ZH — 2012. március 19.

V csoport

---

1. Feladat. (5 pont) Számolja ki az

$$AB + 2C, \qquad \left(A^T - B\right) C, \qquad BA - C^2$$

mátrixok közül azokat, amelyek léteznek, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}!$$

Megoldás:

$$AB + 2C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad \left(A^T - B\right) C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA - C^2 \text{ nem végezhető el.}$$

2. Feladat. (6+2 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

1. $(1;\ 3;\ -4)\,,\ (-2;\ -5;\ 7)\,,\ (-1;\ -2;\ 5)\,,\ (1;\ 4;\ -9)$
2. $(1;\ -3;\ 1;\ -1)\,,\ (2;\ -8;\ -2;\ -1)\,,\ (-1;\ 7;\ 7;\ 0)$
3. $(1;\ -1;\ 2)\,,\ (1;\ 0;\ 6)\,,\ (-3;\ 1;\ -12)$

Megoldás:

1. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.
2. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.
3. Rang $= 3$ $\Longrightarrow$ lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

- Igaz-e a következő állítás: Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő. Válaszát indokolja!
  Megoldás: Nem igaz. Ellenpéldával bizonyítható, például az $(1;\ 1;\ 1)\,,(2;\ 2;\ 2)$ vektorrendszer lineárisan függő, de bármely valódi részrendszere lineárisan független, mert egy darab nem zérusvektor önmagában mindig lineárisan független.

3. Feladat. (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert a p paraméter függvényében! (Hány megoldás van és mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -5 \\ -2x_1 + 3x_2 + (p^2+4)x_3 &= p+2 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{cases} \left(-3 - 2x_3, -2 - 4x_3, x_3\right), & \text{ha } p = -2 \\ \text{nincs megoldás}, & \text{ha } p = 2 \\ \left(-\frac{3p-4}{p-2}, -\frac{2p}{p-2}, \frac{1}{p-2}\right), & \text{ha } p \notin \{2, -2\} \end{cases}$$

4. Feladat. (6+1 pont) Határozza meg a p valós paraméter összes olyan értékét, melyre a következő determináns értéke 42!

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & p \end{vmatrix}$$

Megoldás: $p \in \{6, -4\}$.

- Adjon meg két olyan 2×2-es mátrixot, melyeknek a determinánsa egyenlő, de csak egyetlen helyen különböznek!
  Megoldás: például

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 129 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

5. Feladat. (5+3 pont) A $v = (2;\ -1;\ 9)$ vektor eleme-e az $U = [v_1,\ v_2]$ altérnek, ha $v_1 = (1;\ 1;\ 2)$ és $v_2 = (-1;\ 0;\ -3)$?
Megoldás: Nem.

- Ha a $v_1, \dots, v_k$ egyenletrendszer rangja k és a v vektor nincs benne az $U = [v_1, \dots, v_k]$ altérben, akkor mennyi a $v_1, \dots, v_k, v$ vektorrendszer rangja?
  Megoldás: A feltételek szerint szerint a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független. Mivel $v \notin U$, ezért a $v_1, \dots, v_k, v$ vektorrendszer is lineárisan független, tehát a rangja $k + 1$.

6. Feladat. (6 pont) Legyen

$$U = \{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) :\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \text{ és } V = [(1;\ -1;\ 0;\ -3)\,,\ (0;\ 1;\ 2;\ 1)]$$

két altere az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Adja meg a V alteret lineáris egyenletrendszerrel! Teljesül-e az $U = V$ egyenlőség?
Megoldás:

$$V = \left\{(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\right\}.$$

Az $U = V$ egyenlőség nem teljesül, mert $U \nsubseteq V$. Ellenpéldával igazolható: $(1;\ -1;\ 0;\ 9) \in U$ DE $(1;\ -1;\ 0;\ 9) \notin V$, mert $2 - 1 + 9 \neq 0$.