NÉV: ______________________________

Lineáris algebra gyak.

1. röpdolgozat

2012. február 27.

A csoport

Figyelem! A feladatok megoldásánál **NEM** csak a végeredményt értékelem.

1. Feladat. (5 pont) Számolja ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}!$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} &\overset{(1)}{=} 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \\ &= -4(3-(-2)(-3)) + 3(3(-3)-(-2)1) \\ &= -4(3-6) + 3(-9+2) = 12 - 21 = -9 \end{aligned}$$

(1) : Kifejtem a determinánst az első oszlopa szerint.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} &\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 8 & 0 & 11 \\ -5 & 0 & -6 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & 11 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 8(-6) - 11(-5) = -48 + 55 = 7 \end{aligned}$$

(2) : A negyedik sorhoz hozzáadom a második sor 2-szeresét.
(3) : Kifejtem a determinánst a harmadik oszlopa szerint.
(4) : Az első sor háromszorosát hozzáadom a második sorhoz, és a (-2)-szeresét hozzáadom a harmadik sorhoz.
(5) : Kifejtem a determinánst a második oszlopa szerint.

2. Feladat. (4 pont) Határozza meg az $AC - B^T$ mátrixot, ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc|} & & 2 & -2 \\ & & 1 & -5 \\ \hline 3 & 0 & 6 & -6 \\ 2 & -4 & 0 & 16 \\ -1 & -5 & -7 & 27 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow AC = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 16 \\ -7 & 27 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AC - B^T = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 16 \\ -7 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 17 \\ -7 & 33 \end{pmatrix}$$

3. Feladat. (1 pont) Egy paralelogramma nem párhuzamos oldalai az origóból kiinduló $(2,-1)$ és $(5,-4)$ helyvektorokkal adhatók meg. Mekkora ezen paralelogramma területe?

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 5 = -3$$

A terület a determináns abszolútértéke, azaz 3 (területegység).