Lineáris algebra gyakorlat

12. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. május 14.

Tartalom

Kvadratikus alakok

Definíció

Kvadratikus alaknak nevezzük a

- véges,
- többváltozós,
- homogén,
- másodfokú
- polinomokat.

1. Feladat

Kvadratikus alakok-e az alábbiak?

1. $x_1^2 + x_1 x_2 + x_3^2 + 2x_2$
2. $xy + x^2 + 2y^2 + 3xz$
3. $x_1 x_2 + x_3 x_1 + 2x_2^2$
4. $x_1^2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_2$

Megoldás: Nem, igen, igen, nem.

Kvadratikus alakok

Definíció

Egy $q(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alak

- **pozitív definit**, ha minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $q(v) \geq 0$, és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$;
- **negatív definit**, ha minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $q(v) \leq 0$, és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$;
- **pozitív szemidefinit**, ha minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $q(v) \geq 0$, és $q(v) = 0$ nemcsak akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$;
- **negatív szemidefinit**, ha minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $q(v) \leq 0$, és $q(v) = 0$ nemcsak akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$;
- **indefinit**, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

Kvadratikus alakok

2. Feladat

Határozza meg, hogy a következő kvadratikus alakok osztályát! („Milyen definitek”?)

1. $x_1^2 + 2x_2^2$
2. $x_1^2 + 2x_1 x_2$
3. $x_1 x_2 - x_1 x_3$

Megoldás

Pozitív definit, indefinit, indefinit.

Kvadratikus alakok

Definíció

Minden $q(x_1, \ldots, x_n)$ kvadratikus alak felírható

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

alakban, és az a_{ij} elemekből alkotott mátrix a kvadratikus alak mátrixa.

Kvadratikus alakok

3. Feladat

Határozzuk meg a következő kvadratikus alakok mátrixát!

1. $x_1^2 + 3x_1x_2$
2. $x_2^2 - x_1x_2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 + 8x_1x_3$
3. $2x_1^2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + x_1x_2 - 6x_2x_3 - x_3^2$

Megoldás

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Kvadratikus alakok

Definíció

Egy kvadratikus alak kanonikus alakú, ha nincs benne vegyes tag.

Tétel

- Egy kvadratikus alak lineáris helyettesítésekkel kanonikus alakúra hozható.
- A kvadratikus alakok kanonikus alakja nem egyértelmű.
- (Tehetetlenségi tétel) Egy kvadratikus alaknak bárhogy is írjuk fel a kanonikus alakját, az abban szereplő pozitív illetve negatív együtthatós négyzetes tagok száma mindig ugyanannyi.

Kvadratikus alakok

4. Feladat

Határozza meg az alábbi kvadratikus alakok kanonikus alakját!

1. $-x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2$
2. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
3. $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
4. $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

Megoldás

1. $-y_1^2 - y_2^2$
2. $y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$
3. $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$
4. $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$

Kvadratikus alakok

Tétel

Legyen $x^T Ax$ egy n-változós kvadratikus alak. Ez a kvadratikus alak

- pozitív definit, ha kanonikus alakjában n darab pozitív együtthatós négyzetes tag van;
- pozitív szemidefinit, ha kanonikus alakjában csak pozitív együtthatós négyzetes tagok vannak, de kevesebb, mint n;
- negatív definit, ha kanonikus alakjában n darab negatív együtthatós négyzetes tag van
- negatív szemidefinit, ha kanonikus alakjában csak negatív együtthatós négyzetes tagok vannak, de kevesebb, mint n;
- indefinit, ha a kanonikus alakjában van pozitív és negatív együtthatós négyzetes tag is.

Kvadratikus alakok

5. Feladat

Határozza meg, hogy a következő kvadratikus alakok osztályát! („Milyen definitek”?)

1. $-x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2$
2. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
3. $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$
4. $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

Megoldás

1. $-y_1^2 - y_2^2 \Longrightarrow$ negatív definit
2. $y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2 \Longrightarrow$ indefinit
3. $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 \Longrightarrow$ pozitív definit
4. $2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 \Longrightarrow$ pozitív szemidefinit