

# Lineáris algebra gyakorlat

10. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. április 23.

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátvektor
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Sajátérték, sajátvektor

## Definíció

- Egy  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix **sajátértéke**, ha létezik olyan  $\underline{v} \neq \underline{0}$  vektor, melyre  $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ .
- A fenti definícióban szereplő  $\underline{v}$  *oszlopvektort* az  $A$  mátrix  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó **sajátvektornak** nevezzük.

## Megjegyzések:

- Egy mátrixnak több sajátértéke is lehet.
- Egy sajátértékhez több sajátvektor is tartozik.

## Definíció

Az  $U_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}$  vektorhalmazt a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

# Sajátérték, sajátvektor

## 1. Feladat

Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (a sajátaltérek egy-egy bázisát)!

## Definíció

Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix karakterisztikus polinomja  $f_A(x) = |A - xE|$ , ahol  $E$  az  $(n \times n)$ -es egységmátrix.

## Tétel

A  $\lambda$  szám pontosan akkor sajátértéke az  $A$ -nak, ha  $\lambda$  gyöke az  $A$  karakterisztikus polinomjának.

# Sajátérték, sajátvektor

## 1. Feladat

Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (a sajátaltérek egy-egy bázisát)!

## Megoldás

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 8$$

$$U_4 = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], U_8 = \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

# Sajátérték, sajátvektor

## 2. Feladat

Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (a sajátaltérek egy-egy bázisát)!

## Megoldás

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$$U_3 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], U_1 = \left[ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

## Sajátérték, sajátvektor

## 3. Feladat

Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (a sajátaltérek egy-egy bázisát)!

## Megoldás

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

$$U_2 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], U_{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

# Sajátérték, sajátvektor

## 4. Feladat

Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix  $\lambda = 1$  sajátértékéhez tartozó sajátaltér egy bázisát!

## Megoldás

$$U_1 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$



# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

## 5. Feladat

Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális rendszerét! (= Adjunk bázist a megoldásterében!)

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

## 6. Feladat

Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer egy fundamentális rendszerét! (= Adjunk bázist a megoldásterében!)

$$-2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0$$

## Megoldás

- $(-1, 1, 1, 0)$ ;  $(0, 1, 0, 1)$
- $(1, -1, 1, 0)$ ;  $(1, -3, 0, 1)$

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - **Mátrixegyenlet**
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

## 7. Feladat

Adja meg a következő mátrixegyenlet megoldását!

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 8. Feladat

Adja meg a következő mátrixegyenlet megoldását!

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

## Megoldás

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 - 3a & 2 - 3b \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 13 - 6a & 5 - 6b \\ 8 - 4a & 3 - 4b \\ a & b \end{pmatrix}$$

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - **Leontyev-modell**
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Leontyev-modell

## 9. Feladat

Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

- 1 Mennyi nyersanyagra van szükség  $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  vektornyi termékek előállításához?
- 2 Működőképes-e a gazdaság?
- 3 Mekkora legyen a bruttó kibocsátás a  $d = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$  nettó kibocsátás eléréséhez?
- 4 Nyereséges-e a termelés, ha a rögzített árrendszer  $v = (1; 5)$ ?

# Leontyev-modell

## 9. Feladat megoldása

- 1  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  vektorny nyersanyagra van szükség.
- 2 Igen, mert a  $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$  Leontyev-inverz minden eleme nemnegatív.
- 3  $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$
- 4 I. terméken a veszteség 0, 1.  
II. terméken a nyereség 3, 8.  
Összesen a nyereség 3, 7.



# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Sajátérték, sajátvektor

## 10. Feladat

Határozza meg a következő mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátalterek egy bázisát!

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

## Megoldás

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4$$

$$U_4 = \left[ \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right], \quad U_9 = \left[ \left( \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]$$

# Sajátérték, sajátvektor

## 11. Feladat

Határozza meg a következő mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátalterek egy bázisát!

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

## Megoldás

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -2$$

$$U_4 = \left[ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad U_5 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right], \quad U_{-2} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - **Paraméteres rang**
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

# Paraméteres rang

## 12. Feladat

A  $p$  valós paraméter értékétől függően határozzuk meg a következő mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

## Megoldás

- Ha  $p = 3$ , akkor a rang 2.
- Ha  $p \neq 3$ , akkor a rang 4.

## 12.+ Feladat

Mindegyik esetben adja meg a mátrix egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát!

## 13. Feladat

A  $p$  valós paraméter értékétől függően határozzuk meg a következő mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} p-6 & 1 & -3 & -p \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ p^2+4 & -2 & 1 & p+1 \end{pmatrix}$$

## Megoldás

- Ha  $p = 1$ , akkor a rang 2.
- Ha  $p = -2$ , akkor a rang 3.
- Ha  $p \notin \{-2, 1\}$ , akkor a rang 4.

## 13.+ Feladat

Mindegyik esetben adja meg a mátrix egy maximális méretű nemeltűnő aldeteminánsát!

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - **Paraméteres egyenletrendszer**
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell



# Paraméteres egyenletrendszer

## 6.9. Feladat

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az  $a$  valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 0 \\-3x_1 + 5x_2 - 14x_3 &= a\end{aligned}$$

## Megoldás

- Ha  $a = 1$ , akkor a megoldás

$$(-2 - 8x_3, -1 - 2x_3, x_3).$$

- Ha  $a \neq 1$ , akkor nincs megoldás.

## 20. Feladat

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását a  $p$  valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + (p - 1)x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3 \\3x_1 + (2p + 3)x_2 + (p + 9)x_3 - 4x_4 &= 6 \\-2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= -3\end{aligned}$$

## Megoldás

- Ha  $p \in \{1, 2\}$ , akkor nincs megoldás.
- Ha  $p \notin \{1, 2\}$ , akkor egyetlen megoldás van:

$$\left( \frac{9 - p}{(p - 1)(p - 2)}, \frac{1}{p - 2}, \frac{-4}{(p - 1)(p - 2)}, \frac{-p^2 + 3p - 6}{(p - 1)(p - 2)} \right).$$

## 20. Feladat javítva

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását a  $p$  valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + (p+1)x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3 \\3x_1 + (2p+3)x_2 + (p+9)x_3 - 4x_4 &= 6 \\-2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= -3\end{aligned}$$

### Megoldás

- Ha  $p = 0$ , akkor nincs megoldás.
- Ha  $p = 1$ , akkor végtelen sok megoldás van:

$$(-3 - 2x_4, 1, 1 + x_4, x_4), \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Ha  $p \notin \{0, 1\}$ , akkor 1 darab megoldás van:

$$\left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, 0, -1\right).$$

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - **Paraméteres inverz**
  - Paraméteres Leontyev-modell

## 15. Feladat

Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & a \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét az  $a$  paraméter értékétől függően!

## Megoldás

- Ha  $a = \frac{3}{2}$ , akkor az  $A$  mátrixnak nem létezik inverze.
- Ha  $a \neq \frac{3}{2}$ , akkor

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2a-3} & \frac{a}{2a-3} & \frac{3-a}{2a-3} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2a-3} & \frac{1}{2a-3} & \frac{1}{2a-3} \end{pmatrix}.$$

## 15. Feladat

Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2 & x & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét az  $x$  paraméter értékétől függően!

## Megoldás

- Ha  $x = \frac{7}{6}$ , akkor az  $A$  mátrixnak nem létezik inverze.
- Ha  $x \neq \frac{7}{6}$ , akkor

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2x-1}{6x-7} & \frac{3-2x}{6x-7} & \frac{-2x}{6x-7} \\ \frac{4}{6x-7} & \frac{2}{6x-7} & \frac{-7}{6x-7} \\ \frac{-2}{6x-7} & \frac{-1}{6x-7} & \frac{3x}{6x-7} \end{pmatrix}.$$

# Tartalom

- 1 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér
- 2 Gyakorló feladatok a zh-ra (rutinfeladatok)
  - Homogén lineáris egyenletrendszer
  - Mátrixegyenlet
  - Leontyev-modell
  - Sajátérték, sajátérték
- 3 Gyakorló feladatok a zh-ra (nehezebb feladatok)
  - Paraméteres rang
  - Paraméteres egyenletrendszer
  - Paraméteres inverz
  - Paraméteres Leontyev-modell

## 16. Feladat

Milyen  $p$  valós paraméter esetén lesz az  $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ p & 0,1 \end{pmatrix}$  ráfordítású mátrixú gazdaság működőképes?

## Megoldás

Ha  $0 \leq p \leq 2,25$ , akkor a gazdaság működőképes.

## 7.8. Feladat

Az  $x$  paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

$$\begin{pmatrix} 0,2 & x \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

## Megoldás

Ha  $0 \leq p < 1$ , akkor a gazdaság működőképes.