Lineáris algebra gyakorlat

9. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. április 16.

Tartalom

Tartalom

Inverz

Definíció

Egy $n \times n$-es négyzetes A mátrix inverze egy olyan $n \times n$-es X mátrix, melyre teljesül, hogy

$$AX = XA = E_n,$$

ahol E_n az $n \times n$-es egységmátrix. Az A inverzét A^{-1}-gyel jelöljük.

FONTOS

Csak négyzetes mátrixnak létez**HET** inverze!

Tétel

Az A mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha az A determinánsa nem nulla.

Inverz

1. Feladat

Határozzuk meg a következő mátrix inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Megoldás

Nincs inverze.

2. Feladat

Határozzuk meg a következő mátrix inverzét!

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nagyon hasznos megjegyzés

Ha az

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa nem nulla (azaz létezik inverze), akkor

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Inverz

3. Feladat

Határozzuk meg a következő mátrix inverzét!

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Tartalom

Leontyev-modell

Ráfordítási mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

A ráfordítási mátrixot oszloponként kell értelmezni.

- 1. oszlop: 1 egységnyi I-es termék előállításához $0,2$ I-es termék, $0,3$ II-es termék és $0,1$ III-as termék szükséges. [Az I. szektornak 1 egységnyi termék előállításához $0,2$ (milliárd forintnyi) I. szektorból származó termék, $0,3$ II. szektorból származó termék és $0,1$ III. szektorból származó termék szükséges.]
- 2. oszlop: ...
- 3. oszlop: ...

Leontyev-modell

A ráfordítási mátrix a termelés saját jellemzője, megfigyelések alapján könnyen felírható. Milyen kérdésekre tudunk válaszolni ezen modell segítségével?

- Mennyi nyersanyagra van szükség bizonyos mennyiségű termékek előállításához?
- Mekkora legyen a bruttó kibocsátás egy adott nettó kibocsátás eléréséhez?
- Működőképes-e a gazdaság?
- Nyereséges-e a termelés, ha ismerjük a rögzített árakat?

Leontyev-modell

4. Feladat

Mennyire van szükség az egyes termékekből ahhoz, hogy minden termékből 1 egységnyit tudjunk előállítani, ha a gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Megoldás

I. termékhez szükséges:	0, 1 I-es	0, 7 II-es
II. termékhez szükséges:	0, 2 I-es	0, 4 II-es
Összesen szükséges:	0, 3 I-es	1, 1 II-es

Leontyev-modell

4. Feladat

Mennyire van szükség az egyes termékekből ahhoz, hogy minden termékből 1 egységnyit tudjunk előállítani, ha a gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

2. Megoldás

Végezzük el az $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mátrixszorzást!

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

Leontyev-modell

- A : ráfordítási mátrix
- d : nettó kibocsátási oszlopvektor
- x : bruttó kibocsátási oszlopvektor

Kérdés

Mekkora legyen az x bruttó kibocsátás, hogy a d nettó kibocsátást elérjük?

Válasz

$$x = (E - A)^{-1} \cdot d$$

Leontyev-modell

5. Feladat

Mekkora legyen az x bruttó kibocsátás, hogy a $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ nettó kibocsátást elérjük, ha a gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}?$$

Megoldás

$$\begin{aligned} x &= (E - A)^{-1} \cdot d \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 1,75 & 2,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Leontyev-modell

Működőképesség

Egy A ráfordítási mátrixú gazdaság működőképes, ha létezik olyan y termelési vektor, melyre $y > Ay$. [A termelt mennyiség nagyobb, mint a termeléshez szükséges mennyiség (nyersanyag).]

Tétel

Egy A ráfordítási mátrixú gazdaság pontosan akkor működőképes, ha az $(E - A)^{-1}$ Leontyev-inverzben minden elem nemnegatív.

Leontyev-modell

6. Feladat

Működőképes-e a gazdaság, ha a gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}?$$

Megoldás

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 1,75 & 2,25 \end{pmatrix}$$

Minden elem nemnegatív, így a gazdaság működőképes.

Leontyev-modell

- A : ráfordítási mátrix
- v : a termékek piaci árvektora (sorvektor)

Kérdés

Mely ágazatok termelése nyereséges a rögzített v árrendszer mellett?

Válasz

- A v jelöli a termékek piaci árát.
- A vA szorzat jelöli az egyes termékekre költött összeget.
    - Ahol a vA nagyobb, mint a v, az az ágazat veszteséges, mert többet költünk az előállításra, mint amennyiért el tudjuk adni.
    - Ahol a vA kisebb, mint a v, az az ágazat nyereséges, mert kevesebbet költünk az előállításra, mint amennyiért el tudjuk adni.

7. Feladat

A gazdaság mely ágazatai nyereségesek, ha az árrendszer a $v = (5, 8)$ vektorral adható meg és a gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}?$$

Megoldás

$$\begin{aligned} v &= (5;\ 8) \\ vA &= (6,1;\ 4,2) \end{aligned}$$

- Az I. ágazat veszteséges, a veszteség $1,1$.
- A II. ágazat nyereséges, a nyereség $3,8$.
- Így az egész termelés nyereséges, a nyereség $2,7$.

Leontyev-modell

8. Feladat

Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Mennyi nyersanyagra van szükség $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektornyi termékek előállításához?
2. Működőképes-e a gazdaság?
3. Mekkora legyen a bruttó kibocsátás a $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ nettó kibocsátás eléréséhez?
4. Nyereséges-e a termelés, ha a rögzített árrendszer $v = (1;\ 7)$?

Leontyev-modell

8. Feladat megoldása

1. $\begin{pmatrix} 2.9 \\ 1.3 \end{pmatrix}$ vektornyi nyersanyagra van szükség.
2. Igen, mert a $\begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{14} & \frac{25}{14} \end{pmatrix}$ Leontyev-inverz minden eleme nemnegatív.
3. $\begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{5}{14} & \frac{25}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{7} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}$
4. I. terméken a veszteség $\frac{1}{5}$.
   II. terméken a nyereség 4.
   Összesen a nyereség $\frac{19}{5}$.

9. Feladat

Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

1. Mennyi nyersanyagra van szükség $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektornyi termékek előállításához?
2. Működőképes-e a gazdaság?
3. Mekkora legyen a bruttó kibocsátás a $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ nettó kibocsátás eléréséhez?
4. Nyereséges-e a termelés, ha a rögzített árrendszer $v = (1;\ 2;\ 5)$?

9. Feladat megoldása

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vektornyi nyersanyagra van szükség.
2. Igen, mert a $\begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{45} & \frac{10}{9} & \frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ Leontyev-inverz minden eleme nemnegatív.
3. $\begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{45} & \frac{10}{9} & \frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
4. I. terméken a veszteség $\frac{2}{5}$.
   II. terméken a nyereség $\frac{9}{5}$.
   III. terméken a nyereség $\frac{39}{10}$.
   Összesen a nyereség $\frac{39}{10} + \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = \frac{53}{10}$.