Lineáris algebra gyakorlat

8. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. március 26.

Tartalom

Tartalom

Lineáris egyenletrendszer
I. eset

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszer

I. eset

Ellentmondó sor

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_i & \dots & x_j & b \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e_k & 0 & & 0 & \neq 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

Tétel

Ha az elemi bázistranszformációk során megjelenik ellentmondó sor, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Lineáris egyenletrendszer
I. eset = nincs megoldás

1. Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás

Nincs megoldás.

Lineáris egyenletrendszer

II. eset

2. Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + 4x_3 &= 3 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\
-2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\
4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

Tétel

1. Az olyan e_i-vel kezdődő sort, ami csak nullákat tartalmaz, el kell hagyni.
2. Ha az utolsó lehetséges elemi bázistranszformáció végrehajtása után

$$\begin{array}{c||c|}
 & b \\
\hline
x_i & c_i \\
x_j & c_j \\
\vdots & \vdots \\
x_k & c_k \\
\hline
\end{array}$$

   alakú a táblázat, akkor 1 darab megoldás van:
   $x_i = c_i,\ x_j = c_j,\ \dots,\ x_k = c_k.$
3. Ha minden x_i vektort be tudunk vinni a bázisba, akkor pontosan egy megoldás van, és a megoldásban minden x_i értéke a mellette lévő szám.

Lineáris egyenletrendszer

II. eset = 1 darab megoldás

2. Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Megoldás

$$(-1, 1, 0)$$

Lineáris egyenletrendszer
III. eset

3. Megoldás

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$
\begin{aligned}
-2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\
3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\
-2x_1 + x_3 + x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

Lineáris egyenletrendszer
III. eset

Tétel

Ha nem tudunk minden x_i változót bevinni a bázisba, de nem kaptunk ellentmondó sort, akkor végtelen sok megoldás van. A be nem vitt változók a szabad változók. A megoldásokat a következőképpen kell kiolvasni a végső táblázatból. Például

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_4 & b \\ \hline x_5 & e & f & g \\ x_2 & p & q & r \\ x_3 & u & v & w \\ \hline \end{array}$$

esetén $x_5 = g - ex_1 - fx_4$, $x_2 = r - px_1 - qx_4$, $x_3 = w - ux_1 - vx_4$. (A második függőleges vonal jelenti az „="-jelet!)

Lineáris egyenletrendszer

III. eset = végtelen sok megoldás

3. Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} -2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Megoldás

$$(2 + x_3, 1 + 2x_3, x_3, 2 + x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Tartalom

Homogén lin. egyenletrendszer

4. Feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás

$$(14x_2 + 10x_5, x_2, -23x_2 - 16x_5, 5x_2 + 4x_5, x_5), \quad x_2, x_5 \in \mathbb{R}$$

Tétel - Emlékeztető

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

4+. Feladat

Adjuk meg a fenti megoldásaltér egy bázisát!

1. Az altér dimenziója megegyezik a szabadismeretlenek számával. $\Longrightarrow$ 2 elemű bázist keresünk.
2. Minden szabadismeretlen helyére külön-külön helyettesítsük be az 1-et úgy, hogy a többi szabadismeretlen helyére 0-t helyettesítünk.

x_2	x_5	$(14x_2 + 10x_5, x_2, -23x_2 - 16x_5, 5x_2 + 4x_5, x_5)$
1	0	$(14, 1, -23, 5, 0)$
0	1	$(10, 0, -16, 4, 1)$

Megoldás

Bázis (például): $(14, 1, -23, 5, 0)$, $(10, 0, -16, 4, 1)$.

5. Feladat

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldása során ezt a táblázatot kaptuk:

	x_1	x_2	x_4	
x_5	-2	1	-3	0
x_3	1	0	-3	0

1. Mi az egyenletrendszer megoldása?
2. Hány dimenziós az altér?
3. Adjunk meg egy bázisát!
4. Adjuk meg az U alteret vektorok generátumaként!

Megoldás:

1. $U = \{(x_1, x_2, 3x_4 - x_1, x_4, 2x_1 - x_2 + 3x_4),\ x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
2. $\dim(U) = 3$
3. Bázis (például): $(1, 0, 2, 0, 2)$, $(0, 1, 3, 0, -1)$, $(0, 0, 3, 1, 3)$.
4. $U = [(1, 0, 2, 0, 2), (0, 1, 3, 0, -1), (0, 0, 3, 1, 3)]$

Tartalom

Mátrixegyenlet
$AX = B$

6. Feladat

Oldjuk meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás

$$X = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -2 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Mátrixegyenlet
$AX = B$

6. Feladat

Oldjuk meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás

$$X = \begin{pmatrix} 2+4a & -6+4b \\ a & b \\ -3-5a & 11-5b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Mátrixegyenlet

$XA = B$

7. Feladat

Oldjuk meg a következő mátrixegyenletet!

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

FONTOS

Az 5. és 6. Feladatban használt módszer csak $AX = B$ típusú egyenletre működik, itt közvetlenül nem használható.

Megoldás

$$X = \begin{pmatrix} 22 & -9 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tartalom

Szorgalmi jellegű feladatok

8. Feladat

A p valós paraméter értékétől függően adja meg a következő lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -x_2 + p^2 x_3 &= p + 2 \end{aligned}$$

Megoldás

$$\begin{cases} \text{nincs mego.}, & \text{ha } p = -1; \\ (7 - 5x_3, -3 + x_3, x_3), & \text{ha } p = 1; \\ \left(7 - \frac{5}{1+p}, -3 + \frac{1}{1+p}, \frac{1}{1+p}\right), & \text{ha } p \notin \{1, -1\}. \end{cases}$$

Szorgalmi jellegű feladatok

9. Feladat

A p valós paraméter értékétől függően adja meg a következő lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned}
\left(p^2+2\right)x_1 - x_2 - x_3 &= p-2 \\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\
6x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 8
\end{aligned}$$

Megoldás

$$\begin{cases}
\text{nincs mego.,} & \text{ha } p=-1; \\
\left(x_1, 2, 3x_1-1\right), & \text{ha } p=1; \\
\left(\frac{1}{p+1}, 2, \frac{2-p}{p+1}\right), & \text{ha } p \notin \{1,-1\}.
\end{cases}$$