Lineáris algebra gyakorlat

7. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. március 26.

Tartalom

Ismétlés

1. feladat

Legyen adott a következő vektorrendszer:

$$v_1 = (1, 2, 4, 1)\,,\ v_2 = (-2, -4, -5, -3)\,,$$

$$v_3 = (-1, -2, -7, 0)\,,\ v_4 = (1, 2, -2, 3)\,.$$

1. Lineárisan független-e, generátorrendszer-e, bázis-e?
2. Mennyi az $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ altér dimenziója?
3. Adjuk meg az U altér egy bázisát!
4. Adjuk meg a $v_1 v_2, v_3, v_4$ vektorrendszer egy maximálisan független részrendszerét!

Tartalom

Koordináták

Tétel - emlékeztető

Egy véges dimenziós vektortér bármely két bázisának elemszáma egyenlő.

Tétel

Legyen V egy n-dimenziós vektortér, és $\mathcal{B}$ legyen ennek egy rögzített $e_1, \dots, e_n$ bázisa. Ekkor a V vektortér bármely v vektora **EGYÉRTELMŰEN** előáll a $\mathcal{B}$ bázisbeli vektorok lineáris kombinációjaként: $v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$.

Definíció

Az előző tételbeli $c_1, \dots, c_n$ számokat a v vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátáinak, a $(c_1, \dots, c_n)$ vektort pedig a B bázisbeli koordinátasorának nevezzük.

Koordináták

Példa

$v = (1, -1)$

- $\mathcal{E}$ bázis: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$
  $v = 1e_1 - 1e_2$
  Koordinátasor az $\mathcal{E}$ (standard) bázisban: $(1, -1)$
- $\mathcal{F}$ Bázis: $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 0)$
  $v = -1f_1 + 2f_2$
  Koordinátasor az $\mathcal{F}$ bázisban: $(-1, 2)$
- $\mathcal{G}$ Bázis: $g_1 = (0, 2)$, $g_2 = (1, -3)$
  $v = 1g_1 + 1g_2$
  Koordinátasor a $\mathcal{G}$ bázisban: $(1, 1)$

Koordináták

2. feladat

Adjuk meg a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátasorát az $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 0)$ bázisban.

Megoldás

$v = 1e_1 - 2e_2 + 2e_3$, tehát a koordinátasor $(1, -2, 2)$.

Tartalom

Elemi bázistranszformáció

Definíció

Elemi bázistranszformációnak nevezzük azt a műveletet, melynek során egy bázis egy vektorát kicseréljük egy másik vektorra. Ekkor azt is mondjuk, hogy új vektort viszünk be a bázisba.

Tétel

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ egy bázisa a V vektortérnek. Ekkor a $v \in V$ vektor pontosan akkor cserélhető ki az e_i vektorral a bázisban, ha a v-nek a e_i-hez tartozó koordinátája nem nulla.

Elemi bázistranszformáció

3. Feladat

Adott egy e_1, e_2, e_3 bázis, illetve a

$$v_1 = (1, -2, 1)\,,\;\; v_2 = (0, 3, 1)\,,\;\; v_3 = (-1, -1, 1)$$

vektorok. Vigyünk be annyi vektort a v_1, v_2, v_3 vektorok közül a bázisba, amennyit csak tudunk!

Elemi bázistranszformáció
Gyakorlati végrehajtás

Készítünk egy táblázatot az alábbiak szerint.

1. A táblázat bal szélső oszlopa az $e_1, \dots, e_n$ bázisneveket tartalmazza.
2. A táblázat legfelső oszlopába írjuk a $v_1, \dots, v_k$ vektorok neveit.
3. A táblázat középső részébe a v_i vektorokat írjuk be a megfelelő oszlopba, így reprezentálva, hogy mi az egyes bázisvektorokhoz tartozó koordinátái.

	v_1	$\dots$	v_j	$\dots$	v_k
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_i	a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nk}

A v_j vektor pontosan akkor cserélhető ki az e_i bázisvektorral, ha $a_{ij} \neq 0$.

Elemi bázistranszformáció

Gyakorlati végrehajtás

Az elemi bázistranszformáció lépései a következők:

1. Választunk egy nemnulla generálóelemet a táblázatból. (Csak olyat választhatunk, amely e-s sorban és v-s oszlopban van.)
2. Felcseréljük a generálóelem sorát és oszlopát jelző e és v jelet.
3. A generálóelem helyére a reciprokát írjuk.
4. A generálóelem sorának többi elemét leosztom a generálóelemmel.
5. A generálóelem oszlopának többi elemét leosztom a generálóelemmel és megszorzom (-1)-gyel.
6. A többi elemet téglalapszabállyal számítjuk ki.
7. A fenti lépéseket addig ismételjük, amíg csak tudunk generálóelemet választani.

Elemi bázistranszformáció

Gyakorlati végrehajtás

Téglalapszabály

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	.	s_1	.	k
e_2	.	.	.	.
e_3	.	g	.	s_2

Itt a g a generálóelem, k-t pedig téglalapszabállyal kell kiszámolni. Ekkor az új táblázatban a k helyére a

$$\frac{kg - s_1 s_2}{g}$$

elem kerül.

Elemi bázistranszformáció

Gyakorlati végrehajtás

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & \dots & v_j & \dots & v_k \\
\hline
e_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_i & a_{i1} & \dots & \boxed{a_{ij}} & \dots & a_{ik} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_n & a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} \\
\hline
\end{array}
\quad \searrow
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & \dots & e_i & \dots & v_k \\
\hline
e_1 & \frac{a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}}{a_{ij}} & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{ij}} & \dots & \frac{a_{1k}a_{ij}-a_{ik}a_{1j}}{a_{ij}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_j & \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \dots & \frac{1}{a_{ij}} & \dots & \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_n & \frac{a_{n1}a_{ij}-a_{i1}a_{nj}}{a_{ij}} & \dots & -\frac{a_{nj}}{a_{ij}} & \dots & \frac{a_{nk}a_{ij}-a_{ik}a_{nj}}{a_{ij}} \\
\hline
\end{array}
$$

Elemi bázistranszformáció

3. Feladat

Adott egy e_1, e_2, e_3 bázis, illetve a

$$v_1 = (1, -2, 1), \ v_2 = (0, 3, 1), \ v_3 = (-1, -1, 1)$$

vektorok. Vigyünk be annyi vektort a v_1, v_2, v_3 vektorok közül a bázisba, amennyit csak tudunk!

Megoldás

Mindegyik vektort be tudjuk vinni a bázisba.

Tartalom

4. Feladat

Adott egy e_1, e_2, e_3, e_4 bázis, illetve a

$$v_1 = (1, 1, 0, 2), \qquad v_2 = (1, 2, -2, 1),$$
$$v_3 = (-2, -3, 1, -4), \qquad v_4 = (0, 1, 3, 4)$$

vektorok. Mennyi a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja?

Megoldás

Csak 3 vektort tudunk bevinni a bázisba, így a rangja 3.

Vektorrendszer rangja

4+. Feladat

Adjuk meg az előző vektorrendszer egy maximálisan független részrendszerét!

Megoldás

A bázisba bevitt vektorok egy max. lin. független részrendszert alkotnak.

4++. Feladat

Adjuk meg az $U = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ altér egy bázisát!

Megoldás

A bázisba bevitt vektorok egy max. lin. független részrendszert alkotnak, amelyek bázist alkotnak a generált altérben.

Tartalom

Mátrix rangja

Definíció

- Egy mátrix **sorrangja** a sorvektoraiból álló vektorrendszer rangja.
- Egy mátrix **oszloprangja** az oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangja.
- Egy mátrix egy $k \times k$-s aldeterminánsának nevezünk egy olyan determinánst, melyet úgy kapunk, hogy a mátrixból kiválasztunk k sort és k oszlopot, és ezek metszéspontjából álló determinánst vesszük.
- Egy mátrix **(determináns)rangjának** nevezzük a legnagyobb méretű nem nulla aldeterminánsának a méretét.

Mátrixok rangszámtétele

Tetszőleges mátrix esetén a mátrix sorrangja egyenlő az oszloprangjával és egyenlő a determinánsrangjával.

5. Feladat

Mennyi a következő mátrix rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás

2

5+. Feladat

Adjunk meg a fenti mátrixban egy maximális nemeltűnő aldeterminánst!

Megoldás

Válasszuk azokat a sorokat, melyeket kivittünk a bázisból, és azokat az oszlopokat, amelyeket bevittünk a bázisba. (Természetesen úgy gondolva, mintha vektorrendszer rangját számolnánk.)

Tartalom

Paraméteres rang

6. Feladat

Hogyan változik a

$$(2, 1, 0)\,;\ (p, 0, -1)\,;\ (3, 1, -p)$$

vektorrendszer rangja a p paraméter függvényében? (Mely p értékekre lesz a vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, bázis?)

Megoldás

- $p = \pm 1$ esetén a rang 2 $\Longrightarrow$ lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis
- $p \neq \pm 1$ esetén a rang 3 $\Longrightarrow$ lineárisan független, generátorrendszer, bázis

Paraméteres rang

5.16. (b) Feladat

Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:
$(-1, 1, 0, 1), (x, 1, 2, 1), (1, x, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$.

Megoldás

Ha $x = 1$ vagy $x = 2$, akkor a rang 3, azaz ekkor NEM bázis a vektorrendszer; minden más esetben a rang 4, azaz bázis.

Tartalom

7. Feladat

Hogyan változik az

$$(1,0,2,-1)\,;\;(-2,0,-1,1)\,;\;(0,1,a,2)\,;\;(1,-2,1,2)$$

vektorrendszer rangja az a paraméter függvényében? (Mely a értékekre lesz a vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, bázis?)

Megoldás

- $a=-10$ esetén a rang 3 $\Longrightarrow$ lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis
- $a\neq-10$ esetén a rang 4 $\Longrightarrow$ lineárisan független, generátorrendszer, bázis

8. Feladat

Hogyan változik az

$$(1, 0, 2)\,;\ (-2, -1, 1)\,;\ (0, a, 2)\,;\ (-2, 1, a)$$

vektorrendszer rangja az a paraméter függvényében? (Mely a értékekre lesz a vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, bázis?)

Megoldás

Minden a esetén a rang 3, azaz a vektorrendszer lineárisan függő generátorrendszer, és így nem bázis.

9. Feladat

Mennyi a következő mátrix rangja?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Feladat

Mennyi a következő mátrix rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & -13 & -7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Megoldás

9. Feladat: 3; 10. Feladat: 2.