Lineáris algebra gyakorlat

5. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. március 12.

Összefoglalás

Múlt héten:

- Vektortér
- Altér
- Generált altér (lineáris kombináció)
  - Egy adott vektor eleme-e?
  - Átírás egyenletrendszeres alakba.
  - Kifeszíti-e az adott vektorteret?

Ma: adott egy generált altér.

- Hány vektor kell, hogy kifeszítse/generálja?
- Ezek milyen tulajdonságúak.

Tartalom

Lineáris függetlenség

Lineáris kombináció (ismétlés)

Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Legyenek továbbá $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

vektort a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Lineáris függetlenség (definíció)

A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \ldots, c_n$ valós számok esetén

$$\text{ha } c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = \underline{0}, \text{ akkor } c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

Lineáris függetlenség

1. Feladat

Lineárisan függetlenek-e a következő vektorrendszerek?

1. $(0,1,2)$
2. $(1,-1,0)\,,\ (1,-1,0)$
3. $(1,1,1)\,,\ (-1,2,9)\,,\ (0,0,0)$
4. $(1,0,-2)\,,\ (-3,0,6)$
5. $(1,2,1)\,,\ (1,-1,1)\,,\ (1,1,0)$
6. $(1,1,2)\,,\ (1,-1,-1)\,,\ (0,2,3)$

Megoldás

Igen, nem, nem, nem, igen, nem.

Lineáris függetlenség

Tétel

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha az egyik vektora előáll a többi vektorának lineáris kombinációjaként.

Tétel

Ha egy $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer vektorai n komponensből állnak, akkor az előbbi tétel értelmében a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a belőlük alkotott determináns értéke nem nulla.

Cramer-szabály (emlékeztető)

Szabályos lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Tartalom

Rang

Definíció

Egy $v_1, \ldots v_n$ vektorrendszer rangja a legnagyobb maximális lineárisan független részrendszerének elemszáma, vagyis a rang az r egész szám, ha

1. kiválasztható $v_1, \ldots v_n$ közül r darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrendszert alkossanak, de
2. nem választható ki $v_1, \ldots v_n$ közül $r + 1$ darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrendszert alkossanak.

Fontos észrevétel

- Egy n elemű vektorrendszer rangja legfeljebb n, és pontosan akkor n, ha az egész vektorrendszer lineárisan független.
- Ha tudjuk a rangot, azt is tudjuk lineárisan független-e.

Rang

Kiszámítás

Ha egy vektorrendszer valamelyik vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának valamilyen konstansszorosát, vagy valamelyik vektorát megszorozzuk egy nem nulla konstanssal, akkor a vektorrendszer rangja nem változik.

!!! TEHÁT A MÓDSZER GAUSS-ELIMINÁCIÓ. !!!

Rang

2. feladat

Számítsuk ki a következő vektorrendszerek rangját!

1. $(1,1,0)\,,\ (2,2,0)$
2. $(1,2,1)\,,\ (1,-1,1)\,,\ (1,1,0)$
3. $(1,-1,0)\,,\ (1,1,1)\,,\ (1,-3,-1)$
4. $(1,2,1,0)\,,\ (1,1,1,1)\,,\ (1,1,2,3)$

Megoldás: 1, 3, 2, 3.

3. feladat

Hogyan változik az alábbi vektorrendszer rangja a p paraméter függvényében?

$$(1,2,3)\,,\ (p,4,5)\,,\ (0,-1,1)$$

Megoldás: Ha $p=\frac{9}{5}$, akkor a rang 2, egyébként a rang 3.

Tartalom

Bázis

Definíció (emlékeztető)

Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszert a V altér generátorrendszerének nevezzük, ha $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$.

Tétel

A $v_1, \ldots v_k$ vektorrendszer generátorrendszere $\mathbb{R}^n$-nek, pontosan akkor, ha a rangja egyenlő n-nel.

Definíció

Egy vektortér lineárisan független generátorrendszerét bázisnak nevezzük.

Összefoglalás

A mai nap főtétele

Legyen $v_1, v_2, \dots, v_k$ egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer. (Tehát k darab vektor, mindegyik n koordinátával.) Jelöljük a vektorrendszer rangját r-rel. Ekkor teljesülnek a következők:

1. $0 \leq r \leq k$,
2. $r = k \iff$ a vr. lineárisan független,
3. $r = n \iff$ a vr. generátorrendszer,
4. $r = n = k \iff$ a vr. bázis,

---

5. $r < k \iff$ a vr. lineárisan függő,
6. $k < n \iff$ a vr. NEM generátorrendszer,
7. $k > n \iff$ a vr. lineárisan függő.

Feladatok

4. feladat

A következő rendszerek lineárisan függetlenek/generátorrendszerek/bázisok-e?

1. $(1,2,-1)\,,\ (-1,1,1)\,,\ (1,2,0)$
2. $(1,-1,0)\,,\ (1,1,1)\,,\ (1,-3,-1)$
3. $(1,2,1,0)\,,\ (1,1,1,1)\,,\ (1,1,2,3)$
4. $(1,-1,2)\,,\ (1,1,1)\,,\ (0,1,2)\,,\ (1,-2,1)$

Megoldás

1. $r=3 \implies$ lin. fgtlen., gen. rendszer, bázis
2. $r=2 \implies$ lin. függő, nem gen. rendszer, nem bázis
3. $r=3 \implies$ lin. fgtlen., nem gen. rendszer, nem bázis
4. $r=3 \implies$ lin. függő, gen. rendszer, nem bázis

Tartalom

Dimenzió

Definíció

Egy vektortér véges dimenziós, ha van véges generátorrendszere.

Tétel

Egy véges dimenziós vektortér bármely két bázisának elemszáma egyenlő.

Dimenzió

Az előző tételbeli közös elemszám a vektortér dimenziója. Egy V vektortér dimenzióját $\dim V$ -vel jelöljük.

Tétel

A $[v_1, \dots, v_n]$ altér dimenziója egyenlő a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangjával (mivel ez adja meg a bázisainak az elemszámát).

Dimenzió

Dimenziótétel

Ha U_1 és U_2 két altér a V vektortérben, akkor

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Tétel

Ha $U_1 = [v_1, \ldots, v_n]$ és $U_2 = [w_1, \ldots, w_k]$, akkor $U_1 + U_2 = [v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k]$.

5. feladat

Egyenlő-e az $[(1, -1, -3)\,,\ (-1, 0, 2)\,,\ (1, -3, -5)]$ és az $[(1, 7, -1)\,,\ (2, 5, 4)]$ altér?

Megoldás

Nem, mert $\dim U_1 \cap U_2 \neq \dim U_1\ (= \dim U_2)\,.$

Tartalom

Szorgalmi feladatok

4.13. Feladat

Döntsük el, hogy az x paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $(2,-1,1)$ vektor az $[(1,-1,1)\,;\ (1,0,1-x)\,;\ (-1,x+1,-2)]$ altérnek.

4.6. Feladat

Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektortérben az alábbi halmazok?

1. $U=\{A:\ |A|\neq 0\}$
2. $U=\{A:\ |A|=0\}$
3. $U=\left\{A:\ A^T=A\right\}$

4.9. Feladat

Legyen u,v,w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w\notin[u,v]$, $v\notin[u,w]$, de $u\in[v,w]$?

Szorgalmi feladatok

2.11. Feladat

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & b & \dots & b \\ b & a & b & b & b & \dots & b \\ b & b & a & b & b & \dots & b \\ b & b & b & a & b & \dots & b \\ b & b & b & b & a & \ddots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & b & b & b & b & a \end{vmatrix} = ?$$

Elméleti jellegű „gyorskérdések”

Igazak-e az alábbi állítások? Válaszát indokolja! (Bizonyítás, példa, ellenpélda!)

1. Van olyan 2×2-es mátrix, ami nem tartalmaz 0-t, de a determinánsa 0.
2. Ha egy lineáris egyenletrendszer több ismeretlent tartalmaz, mint ahány egyenletet, akkor a lineáris egyenletnek végtelen sok megoldása van.
3. Ha egy determináns minden eleme páratlan szám, akkor a determináns értéke is páratlan.
4. Ha egy lineáris egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlen van benne, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
5. Egy lineáris egyenletrendszer megoldását Gauss-eliminációval kerestük, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó sora így néz ki: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. Ekkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
6. Ha AB megegyezik a nullmátrixszal, akkor az A és B közül legalább az egyik a nullmátrix.
7. Bármely vektortérnek van altere.
8. Ha egy vektortér valamely részhalmaza zárt az összeadásra, akkor az altér.
9. Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő.