Lineáris algebra gyakorlat

4. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. március 5.

Tartalom

Tartalom

Vektortér

Példák

1. A valós együtthatós polinomok halmaza a rájuk vonatkozó összeadással és skalárral vett szorzás.
2. A valós számokból álló $(m \times n)$-es méretű mátrixok a tanult összeadással és skalárral vett szorzással.
3. A legfeljebb n-edfokú valós együtthatójú polinomok a megszokott összeadással és szorzással.
4. A síkon az origóból kiinduló vektorok a szokásos vektorösszeadással és skalárral való szorzással.
5. A vektorok azonosíthatók egy (a, b) számpárral, így megtartva az előző műveleteket, tetszőleges szám n-esekre is vektorteret kapunk: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Vektortér

Definíció:

Egy $(V, +, \cdot)$ hármas struktúrát vektortérnek nevezzük, ha

- V egy olyan halmaz,
- amin értelmezve van egy " $+$ " összeadás művelet, azaz V elemeit össze lehet adni,
- és értelmezve van rajta egy " $\cdot$ " szorzás művelet, azaz V elemeit meg lehet szorozni tetszőleges valós számmal,
- továbbá a fenti műveletekre teljesülnek az alábbi vektortéraxiómák:

Definíció (folytatás):

1. Tetszőleges $u, v, w \in V$ elemek esetén $u + (v + w) = (u + v) + w$, vagyis az összeadás asszociatív.
2. Tetszőleges $u, v \in V$ elemek esetén $u + v = v + u$, vagyis az összeadás kommutatív.
3. Létezik (az) additív egységelem (zéruselem), azaz létezik olyan $\underline{0} \in V$ elem, hogy tetszőleges $u \in V$ esetén $\underline{0} + u = u + \underline{0} = u$.
4. V minden elemének létezik additív inverze, azaz minden $u \in V$ esetén létezik egy V-beli $-u$ elem úgy, hogy $u + (-u) = \underline{0}$.
5. Tetszőleges $u \in V$ elem esetén $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.
6. Tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ valós számokra és tetszőleges $u \in V$ elemre teljesül, hogy $(cd) \cdot u = c \cdot (d \cdot u)$.
7. Tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ valós számokra és tetszőleges $u \in V$ elemre teljesül, hogy $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$.
8. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós számra és tetszőleges $u, v \in V$ elemekre teljesül, hogy $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$.

Példák

Példák

1. A valós együtthatós polinomok halmaza a rájuk vonatkozó összeadással és skalárral vett szorzás.
2. A valós számokból álló $(m \times n)$-es méretű mátrixok a tanult összeadással és skalárral vett szorzással.
3. A legfeljebb n-edfokú valós együtthatójú polinomok a megszokott összeadással és szorzással.
4. A síkon az origóból kiinduló vektorok a szokásos vektorösszeadással és skalárral való szorzással.
5. A vektorok azonosíthatók egy (a, b) számpárral, így megtartva az előző műveleteket, tetszőleges szám n-esekre is vektorteret kapunk: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Vektortér

1. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi halmaz, a megadott összeadásra és skalárral való szorzásra nézve vektorteret alkot-e!

$$\mathbb{R}^2,\text{ ahol } (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ és } \mu(a,b)=(\mu a,b)$$

Megoldás

Nem, mert a 7. axióma nem teljesül.

Vektortér

Fontos

Egy vektortér megadásához nem elég egy halmazt megadni, pontosan definiálni kell a két műveletet is úgy, hogy teljesüljön a 8 axióma.

Tartalom

Altér

Definíció

A V vektortér egy nemüres U részhalmazát altérnek nevezzük, ha U is vektortér.

Tétel / ekvivalens definíció

A V vektortér egy nemüres U részhalmaza pontosan akkor altér, ha zárt a V-beli összeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

Tétel / Példa

Egy n-változós **homogén egyenletrendszer** megoldásai alteret alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

Altér

2. feladat

Igazak-e a következők?

- A sík (mint vektortér) egyenesei alteret alkotnak.
- A sík (mint vektortér) origón átmenő egyenesei alteret alkotnak.
- Minden V vektortérnek altere a V vektortér.
- Minden V vektortérnek altere a $\{\underline{0}\}$ vektortér.
- Az $U = \{(x_1, x_2, x_3) : \; x_1 - x_2 + x_3 = 1; \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ altér $\mathbb{R}^3$-ban.
- Az $U = \{(x_1, x_2, x_3) : \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ altér $\mathbb{R}^3$-ban.
- Az $U = \{(x_1, x_2, x_3) : \; x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$ altér $\mathbb{R}^2$-ben.

Megoldás

Nem, igen, igen, igen, nem, igen, nem.

Tartalom

Lineáris kombináció

Definíció

Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Legyenek továbbá $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

vektort a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Definíció

Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a

$$[v_1, \ldots, v_n] = \{c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n : c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}\}$$

halmaz alteret alkot V-ben, és ezt a halmazt a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer által **generált altér**nek nevezzük.

Generált altér

3. feladat

Az $(1,2,1)$ vektor eleme-e az

$$[(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)]$$

altérnek?

4. feladat

Az $(1,2,1)$ vektor eleme-e az

$$[(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (2,1,0)]$$

altérnek?

Megoldás

Igen, nem.

Generált altér

5. feladat

Adjuk meg az

$$U = [(1,1,0),\ (1,0,2)]$$

alteret egyenletrendszerrel!

Megoldás

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) :\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

Generátorrendszer

Definíció

Legyen V egy vektortér, U egy altere V-nek, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszert az U altér generátorrendszerének nevezzük, ha $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = U$.

6. feladat

Az $\mathbb{R}^4$-nek generátorrendszere-e az

$$(1, 0, 1, -1)\,,\ (2, 1, 1, 0)\,,\ (-1, 1, -1, 1)$$

vektorrendszer?

Megoldás

(Triviális, hogy) nem.

Tartalom

Paraméteres egyenletrendszer

3.9. Feladat (szorgalmi)

Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 &= a + 4 \end{aligned}$$

Megoldás

$$\begin{cases} \text{nincs mo.}, & \text{ha } a = 3, \\ (5 - x_3, 2, x_3)\,, \ x_3 \in \mathbb{R}, & \text{ha } a = -3, \\ \left(5 - \frac{1}{a-3}, 2, \frac{1}{a-3}\right)\,, & \text{ha } a \notin \{3, -3\}\,. \end{cases}$$