Lineáris algebra gyakorlat

3. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. február 27.

Tartalom

Cramer-szabály

Definíció

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Ez felírható mátrixos alakban is:

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}.$$

Cramer-szabály

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszert szabályosnak nevezünk, ha ugyanannyi egyenletből áll, mint ahány ismeretlen van benne, és az együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.

Tétel

Az $AX = B$ szabályos lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, és a megoldás megkapható a következő alakban:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Tartalom

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy m egyenletből álló, n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Definíció

Az (1) egyenletrendszer megoldásának nevezünk egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est, ha azt az (1)-be visszahelyettesítve minden egyenlőség teljesül.

Lineáris egyenletrendszerek
Jelölések

Definíció

Az (1) egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ formában is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Elemi átalakítások

Egyenletrendszerekre

Az elemi átalakítások a lineáris egyenletrendszer olyan átalakításai, melynek során az egyenletrendszer megoldásainak halmaza nem változik, azaz az elemi átalakítások végrehajtása után mindig az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerhez jutunk.

Definíció

Egyenletrendszer elemi átalakításai:

1. Két egyenletet felcserélése.
2. Egy egyenletet megszorzása egy tetszőleges nemnulla skalárral.
3. Valamelyik egyenlethez egy másik egyenlet skalárszorosának hozzáadása.
4. Ha az egyik egyenletben minden együttható és a jobb oldali konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk.

Elemi átalakítások

Bővített mátrixra

Definíció

Egyenletrendszer bővített mátrix elemi átalakításai:

1. Két sort felcserélünk.
2. Egy sort megszorzunk egy tetszőleges nemnulla skalárral.
3. Valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor skalárszorosát.
4. A „csupa nulla sort” elhagyjuk.

Fontos

Az elemi átalakítások végrehajtása után mindig az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer bővített mátrixához jutunk.

Lépcsős alak

Definíció

Egy egyenletrendszer lépcsős alakú, ha a bővített mátrixának

1. nincs csupa nulla sora;
2. minden sorának első nemnulla eleme hátrább van, mint a fölötte álló sor első nemnulla eleme;
3. (minden sorának első nemnulla eleme 1).

Példa

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Gauss-elimináció

Gauss-elimináció

Bármely nem azonosan nulla bővített mátrixú egyenletrendszer lépcsős alakra hozható elemi átalakításokkal, és ebből az egyenletrendszer megoldása könnyen kiolvasható.

1. Példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 - 5x_2 &= -2 \\ -3x_1 - 10x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 0 & -2 \\ -3 & -10 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

1 darab megoldás van:

$$\left(\frac{28}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

2. Példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 3w &= 0 \\ 2x - y + z + 10w &= 0 \\ x - 2y + 5z - w &= 1 \\ -4x + 7y - 17z &= -2 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & -17 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszernek NINCS megoldása.

Gauss-elimináció példák

3. Példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 &= 5 \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= -10 \end{aligned}$$

Kötött és szabad változók

Definíció

Az (1) lineáris egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakjában a soronkénti első nem nulla elemek oszlopainak megfelelő változókat kötött változóknak nevezzük.

Definíció

Az (1) lineáris egyenletrendszer nem kötött változóit szabad változóknak nevezzük.

3. Példa

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 &= 5 \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= -10 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & 9 & 5 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \ldots$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, az általános megoldás ilyen alakú:

$$(-6 + 3x_2 - 16x_5, x_2, -6 - 10x_5, -1 - 2x_5, x_5), \quad x_2, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Gauss-elimináció - Összefoglaló

Tétel

Bármely lineáris egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása van.

- Az egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha a bővített mátrixában van ellentmondó sor:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right), \text{ ahol } c \neq 0.$$

- Az egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha van szabad változója.
- Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjának ugyanannyi sora van, mint ahány ismeretlen, azaz nincs szabad változó.

Paraméteres példa

4. Példa

Határozza meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + (a^2+6)x_3 &= a+3 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{cases} \left(10-10x_3, 3-2x_3, x_3\right), \; x_3 \in \mathbb{R}, & \text{ha } a = 2, \\ \text{nincs megoldás}, & \text{ha } a = -2, \\ \left(10 - \frac{10}{a+2}, 3 - \frac{2}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right), & \text{különben.} \end{cases}$$

Tartalom

Szorgalmik

2.6. Feladat

Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az alábbi determináns értéke 4 legyen!

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x+3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.13. Feladat

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Szorgalmik

2.9. Feladat

Igaz-e, hogy bármely, nem 0 értékű determináns első sorában található olyan elem, amit le lehet cserélni úgy, hogy a determináns már 0 legyen?

2.19. Feladat

Igazak-e a következő állítások?

- Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám.
- Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
- Ha egy $n \times n$-as mátrix minden eleme páros szám, akkor a mátrix determinánsa 2^n-nel osztható egész szám.