# Lineáris algebra gyakorlat

2. gyakorlat

Gyakorlatvezető: Bogya Norbert

2012. február 20.

# Szorgalmik

## 1.8. Feladat

Számítsuk ki az alábbi mátrixot: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

## 1.13. Feladat

Legyen $A$ egy valós mátrix, és tegyük fel, hogy az $AA^T$ mátrix nyoma nulla. Határozzuk meg $A$-t!

## 1.15. Feladat

Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $A, B$ $(n \times n)$-es mátrixok esetén?

1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. $(AB)^T = A^T B^T$
3. $A^n A^m = A^{nm}$

# Tartalom

# Determinánsok
## Definíció

### FONTOS
CSAK NÉGYZETES MÁTRIXOKNAK VAN DETERMINÁNSA, AMI EGY SZÁM!

**Négyzetes mátrix $\rightarrow$ valós szám.**

### Jelölés
Ha $A$ egy négyzetes mátrix, akkor a determinánsát $\det(A)$-val, vagy $|A|$-val jelöljük.

### Definíció - 1. rész
Egy $(1 \times 1)$-es mátrix determinánsa az a SZÁM, amit a mátrix tartalmaz.

# Determinánsok
## Definíció

### Definíció - 2. rész

Egy $(2 \times 2)$-es mátrix determinánsának kiszámítására a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{(főátló elemeinek szorzata)}$$
$$= -\text{(mellékátló elemeinek szorzata)}$$
$$ad - bc.$$

# Determinánsok

## Aldetermináns

Ha egy mátrixból elhagyjuk az $i$. sorát és a $j$. oszlopát, akkor a megmaradt mátrix determinánsát a megfelelő sor-oszlop kombinációhoz tartozó aldeterminánsnak nevezzük, és $M_{ij}$-vel jelöljük.

## Adjungált aldetermináns

Az $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ determinánst a megfelelő sor-oszlop kombinációhoz tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük.

# Determinánsok
## Definíció

### Definíció - 3. rész

Legyen $B$ egy $(n \times n)$-es mátrix, ahol $n > 1$. Ekkor

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{(def)}{=} \sum_{j=1}^{n} \left( b_{1j} \cdot A_{1j} \right),$$

ahol $A_{ij}$ a megfelelő adjungált aldetermináns.

- Rekurzív definíció: visszavezetés kisebb méretű determinánsokra.
- A fenti definíciót a determináns első sora szerinti kifejtésnek nevezzük.

# Tartalom

# Determinánsok

## Tétel

1. A determináns tetszőleges sora szerint kifejthető.
2. A determináns megegyezik a transzponáltjával.
3. A determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.
4. Ha a determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.
5. A determináns értéke nulla, ha van két azonos sora.
6. Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a konstanssal megszorzunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.
7. A determináns nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.
8. Dualitási elv: az 1. – 7. állításokban a „sor" szó kicserélhető az „oszlop" szóra.

# Determinánsok

## Tétel

**A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát. (Oszlopra is igaz.)**

## Új módszer: tervszerű kinullázás

- A fenti tétel segítségével el tudjuk érni, hogy egy tetszőleges sorban/oszlopban csak egyetlen nemnulla elem szerepeljen.
- Ezen sor/oszlop szerint kifejtve a determinánst csak egyetlen kisebb méretű determinánst kapunk.

# Determinánsok

## Érdekesség - összehasonlítás

A két módszer időigényének összehasonlítása egy 5 GHz-es processzorral működő gépen.

| Mátrix mérete | Kinullázó módszer | Kifejtéses módszer |
|---|---|---|
| $n \times n$ | $\mathcal{O}(n^3)$ | $\mathcal{O}(n!)$ |
| $3 \times 3$ | $0,54 \cdot 10^{-8}$ sec | $0,12 \cdot 10^{-8}$ sec |
| $10 \times 10$ | $0,0000002$ sec | $0,00072576$ sec |
| $15 \times 15$ | $0,000000675$ sec | $4,358914560$ min |
| $20 \times 20$ | $0,0000016$ sec | $15,64366003$ év |
| $50 \times 50$ | $0,000025$ sec | $0,1955638709 \cdot 10^{48}$ év |

$\downarrow$

A Nap várható élettartama $5 - 10$ milliárd év.

# Tartalom

# Cramer-szabály

## Definíció

Az

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

egyenletrendszer lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Ez felírható mátrixos alakban is:

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}.$$

# Cramer-szabály

## Definíció

Egy lineáris egyenletrendszert szabályosnak nevezünk, ha ugyanannyi egyenletből áll, mint ahány ismeretlen van benne, és az együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.

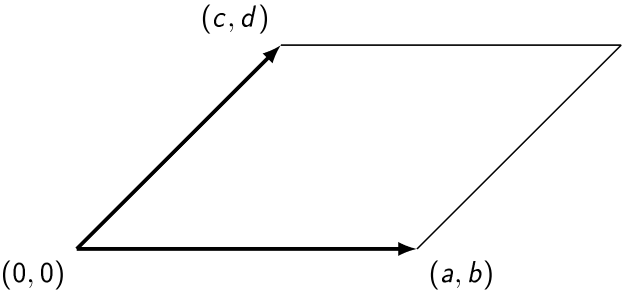
## Tétel

Az $AX = B$ szabályos lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, és a megoldás megkapható a következő alakban:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

# Tartalom

# Paralelogramma területe

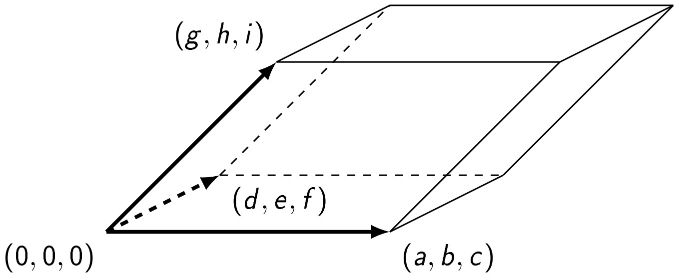



## Tétel

Egy olyan paralelogrammának, melynek az egyik csúcsa az origó, és az ebből kiinduló két (nem párhuzamos) oldalvektora $(a, b)$ és $(c, d)$, a területe az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ determináns abszolút értéke.

# Tartalom

# Paralelepipedon térfogata




## Tétel

Egy olyan paralelepipedonnak, melynek az egyik csúcsa az origó, és az ebből kiinduló három (különböző irányú) oldalvektora $(a, b, c)$, $(d, e, f)$ és $(g, h, i)$, a térfogata az $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ determináns abszolút értéke.

# Tartalom

# DWL kiszámítása
## Mikroökonómia

- lineáris keresleti és kínálati függvény
- kormányzati beavatkozás adóval
- „konstans” adó

---

? Mekkora a társadalmi többlet?

? Mekkora a holtteherveszteség?

**Ha marad idő, megmutatom.**