Bázistranszformáció és alkalmazásai 2.

Lineáris algebra gyakorlat

Összeállította:
Bogya Norbert

Tartalomjegyzék

Tartalom

Elmélet I.

Definíció

Egy mátrix sorrangjának nevezzük a sorvektoraiból álló vektorrendszer rangját.

Definíció

Egy mátrix oszloprangjának nevezzük a oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangját.

Definíció

Egy mátrix egy $k \times k$-s aldeterminánsának nevezünk egy olyan determinánst, melyet úgy kapunk, hogy a mátrixból kiválasztunk k sort és k oszlopot, és ezek metszéspontjából álló determinánst vesszük.

Elmélet II.

Definíció

Egy mátrix determinánsrangjának nevezzük a legnagyobb méretű nem nulla aldeterminánsának a méretét.

Mátrixok rangszámtétele

Tetszőleges mátrix esetén a mátrix sorrangja egyenlő az oszloprangjával és egyenlő a determinánsrangjával.

Definíció

A fenti tétel értelmében meghatározott számot a mátrix rangjának nevezzük.

Tartalom

1. feladat

Feladat

Mennyi a következő mátrix rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás

Írjuk fel a bázistranszformációhoz szükséges táblázatot, és hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat, ameddig lehetséges (pont úgy, mint a vektorrendszer rangjánál).

1. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	$\boxed{1}$	4	2	0	1
e_2	2	−4	0	−1	0
e_3	−1	8	2	1	1
e_4	7	4	6	−2	3

1. feladat
Megoldás

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline
e_1 & \boxed{1} & 4 & 2 & 0 & 1 \\
e_2 & 2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\
e_3 & -1 & 8 & 2 & 1 & 1 \\
e_4 & 7 & 4 & 6 & -2 & 3 \\ \hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline
v_1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\
e_2 & -12 & -4 & -1 & -2 \\
e_3 & 12 & 4 & \boxed{1} & 2 \\
e_4 & -24 & -8 & -2 & -4 \\ \hline
\end{array}$$

1. feladat
Megoldás

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
e_1 & \boxed{1} & 4 & 2 & 0 & 1 \\
e_2 & 2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\
e_3 & -1 & 8 & 2 & 1 & 1 \\
e_4 & 7 & 4 & 6 & -2 & 3 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\
e_2 & -12 & -4 & -1 & -2 \\
e_3 & 12 & 4 & \boxed{1} & 2 \\
e_4 & -24 & -8 & -2 & -4 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & v_2 & v_3 & v_5 \\
\hline
v_1 & 4 & 2 & 1 \\
e_2 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 12 & 4 & 2 \\
e_4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

1. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	$\boxed{1}$	4	2	0	1
e_2	2	−4	0	−1	0
e_3	−1	8	2	1	1
e_4	7	4	6	−2	3

$\rightsquigarrow$

	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	4	2	0	1
e_2	−12	−4	−1	−2
e_3	12	4	$\boxed{1}$	2
e_4	−24	−8	−2	−4

$\rightsquigarrow$

	v_2	v_3	v_5
v_1	4	2	1
e_2	0	0	0
v_4	12	4	2
e_4	0	0	0

- Nem tudunk több generálóelemet választani.
- A mátrix sorrangja 2 (mert két vektort tudtunk bevinni a bázisba), így a mátrix rangja is kettő.

1'. feladat

Feladat

Az előző feladatban szereplő mátrix rangja 2. Ez azt jelenti, hogy megadható olyan 2×2-es aldeterminánsa, mely nem nulla. Adjunk meg egy ilyet!

	v_2	v_3	v_5
v_1	4	2	1
e_2	0	0	0
v_4	12	4	2
e_4	0	0	0

Az előző bázistranszformációk során kapott utolsó táblázatból már kiolvasható a megoldás:

- a determináns sorindexei a bázisból kivett bázisváltozók, jelen esetben e_1, e_3;
- a determináns oszlopindexei a bázisba bevitt vektorok, jelen esetben v_1, v_4.

Így a megoldáshoz szükséges determináns:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Megjegyzés: Bármely 3×3-as aldetermináns értéke nulla.

Tartalom

Elmélet

Definíció

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Az X mátrixot az A inverzének nevezzük, ha

$$A \cdot X = X \cdot A = E_n,$$

ahol E_n az $n \times n$-es egységmátrix.

Állítás

Ha egy A mátrixnak létezik az inverze, akkor az egyértelműen meghatározott és A^{-1}-gyel jelöljük.

Tétel

Egy $n \times n$-es mátrixnak pontosan akkor létezik (az) inverze, ha a determinánsa nem nulla.

Tartalom

2. feladat

Feladat

Határozzuk meg az A mátrix inverzét ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}!$$

Megoldás

Írjuk fel a bázistranszformációhoz szükséges táblázatot, és hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat, ameddig lehetséges (pont úgy, a mátrix rangjánál).

- A mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha sikerül az összes v-vel jelölt oszlopvektort bevinni a bázisba.
- Ha sikerült, akkor csak oszlop és sorcserékkel sorba rendezzük az indexeket, és a táblázat megadja az inverzet.
- FONTOS: A GENERÁLÓELEM OSZLOPÁT MOST NEM SZABAD ELHAGYNI.

2. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3
e_1	2	-2	-5
e_2	6	-1	-4
e_3	$\boxed{1}$	2	4

2. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3
e_1	2	-2	-5
e_2	6	-1	-4
e_3	$\boxed{1}$	2	4

$\rightsquigarrow$

	e_3	v_2	v_3
e_1	-2	$\boxed{-6}$	-13
e_2	-6	-13	-28
v_1	1	2	4

2. feladat

Megoldás

	v_1	v_2	v_3
e_1	2	-2	-5
e_2	6	-1	-4
e_3	$\boxed{1}$	2	4

$\rightsquigarrow$

	e_3	v_2	v_3
e_1	-2	$\boxed{-6}$	-13
e_2	-6	-13	-28
v_1	1	2	4

$\rightsquigarrow$

	e_3	e_1	v_3
v_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{13}{6}$
e_2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{13}{6}$	$\boxed{\frac{1}{6}}$
v_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

2. feladat

Megoldás

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 \\
\hline
e_1 & 2 & -2 & -5 \\
e_2 & 6 & -1 & -4 \\
e_3 & \boxed{1} & 2 & 4 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|ccc|}
 & e_3 & v_2 & v_3 \\
\hline
e_1 & -2 & \boxed{-6} & -13 \\
e_2 & -6 & -13 & -28 \\
v_1 & 1 & 2 & 4 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
$$

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & e_3 & e_1 & v_3 \\
\hline
v_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{13}{6} \\
e_2 & -\frac{5}{3} & -\frac{13}{6} & \boxed{\frac{1}{6}} \\
v_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|ccc|}
 & e_3 & e_1 & e_2 \\
\hline
v_2 & 22 & 28 & -13 \\
v_3 & -10 & -13 & 6 \\
v_1 & -3 & -4 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

2. feladat
Megoldás

	e_3	e_1	e_2
v_2	22	28	-13
v_3	-10	-13	6
v_1	-3	-4	2

Sorba rendezzük a sor- és oszlopjelzéseket az indexek szerint és a táblázatot is annak megfelelően rendezzük:

2. feladat
Megoldás

	e_3	e_1	e_2
v_2	22	28	−13
v_3	−10	−13	6
v_1	−3	−4	2

Sorba rendezzük a sor- és oszlopjelzéseket az indexek szerint és a táblázatot is annak megfelelően rendezzük:

	e_1	e_2	e_3
v_1	−4	2	−3
v_2	28	−13	22
v_3	−13	6	−10

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 28 & -13 & 22 \\ -13 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Mátrixegyenlet

1. típus

Feladat

Oldjuk meg az $AX = B$ egyenletet, ahol A és B ismert, X a keresett mátrix!

Megoldás

1. Ellenőrizzük, hogy a méretek miatt egyáltalán létezhet-e megfelelő X. Ha nem létezhet, akkor nincs megoldás.
2. Felírjuk a bázistranszformáció táblázatát úgy, mint az egyenletrendszernél, de a konstans-oszlop helyett a B mátrix szerepel.
3. A megoldás menete ugyanúgy megy, mintha egyenletrendszerrel dolgoznánk.
4. A végén a megoldás kiértékelése is hasonlóan működik, de vigyázni kell, hogy itt az ismeretlenek tulajdonképpen vektorok. (Így például szabadismeretlen esetén a szabadvektorokban több szabad paraméter van.)

Mátrixegyenlet

2. típus

Feladat

Oldjuk meg az $XA = B$ egyenletet, ahol A és B ismert, X a keresett mátrix!

Megoldás

1. Transzponáljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} (XA)^T &= B^T \\ A^T X^T &= B^T \\ A^T Y &= B^T \end{aligned}$$

2. Az előző dián lévő módszert alkalmazzuk az A^T, B^T és Y mátrixokra, ahol Y az ismeretlen.
3. Ahhoz, hogy megkapjuk az X mátrixot, transzponálnunk kell az Y-t.