

6. Feladatsor - Elemi bázistranszformáció

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, VII. fejt. 1, 2, 3, 4. IX. fejt. 1, 2, 4.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, VI. fejt. 5, 6, 7, 8.

6.1. Feladat. Hajtsuk végre az alábbi elemi bázistranszformációkat (a generáló elem legyen a *-gal jelölt).

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 1^* & 2 & -1 \\ e_2 & 2 & -1 & 2 \\ e_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad \text{(b)} \quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & -2 & 1 \\ e_2 & 0 & -2 & 3 \\ e_3 & 1 & 2^* & -3 \end{array} \\
 \\
 \text{(c)} \quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & 1 & 2 \\ e_2 & -2^* & 1 & 2 \\ e_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}, \quad \text{(d)} \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline e_1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ e_2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ e_3 & 2 & -2 & 3^* & 2 \end{array}
 \end{array}$$

6.2. Feladat. Elemi bázistranszformáció segítségével adjunk meg maximális lineárisan független részrendszert az alábbi vektorrendszerekben.

- (a) $(1, 1, 0), (-1, 2, 1), (0, 3, 1), (2, -1, -1)$;
- (b) $(1, 1, -1, 0), (1, 2, 1, 1), (2, 3, 0, 1), (0, 1, 2, 1), (3, 4, -1, 1)$;
- (c) $(1, 1, -1, 1), (-1, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)$.

6.3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nemeltűnő aldeteminánst.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

6.4. Feladat. Oldjuk meg a **3.1.–3.7.** feladatokat elemi bázistranszformáció segítségével.

6.5. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{array} \\
 \\
 \text{(b)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$(c) \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Szorgalmi feladatok

6.6. Feladat. A p valós paraméter értékétől függően határozzuk meg a következő mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját a λ paraméter függvényében:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

6.8. Feladat. Hány maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsa van az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.9. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 14x_3 &= a \end{aligned}$$

6.10. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + ax_4 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 2x_4 &= 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 5 \end{aligned}$$

6.11. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

- Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
- Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
- Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
- Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
- Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
- Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
- Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

6.12. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldásterében. (**Javítva!**)

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 - ax_5 & = & 0 \\ ! \quad -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array}$$