5. Feladatsor - Lineáris függetlenség, bázis, koordinátasor

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, III. fej. $1, 2, 3$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, III. fej. $4, 5$. IV. fej. $1, 2, 3$.

5.1. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,\ 0,\ 1), (1\ ,1\ ,1), (1\ ,0\ ,1);$
(b) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,\ 2,\ 1), (1,\ -1,\ 1), (1,\ 1,\ 0);$
(c) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,\ -2,\ 4), (2,\ -3,\ 1), (-4,\ 5,\ 5);$
(d) $V = \mathbb{R}^4,\ (1,\ -2,\ 3,\ 4), (0,\ -3,\ 1,\ 2), (2\ -4,\ 5,\ 9);$
(e) $V = \mathbb{R}^5,\ (1, -2, 0, 3, 1), (0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1).$

5.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját.

(a) $(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 2);$
(b) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 0);$
(c) $(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -1, 1), (1, 1, 2, 3).$

5.3. Feladat. Döntsük el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázisa-e, generátorrendszere-e V-nek.

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ (1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1);$
(b) $V = \mathbb{R}^3,\ (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1);$
(c) $V = \mathbb{R}^3,\ (1, 2, -1), (-1, 1, 1), (1, 2, 0);$
(d) $V = \mathbb{R}^4,\ (1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1).$

5.4. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

(a) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$
(b) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3);$
(c) $v = (1, 2, 1)$, bázis: $(-1, 2, 1), (1, 2, 3), (-1, 1, 1);$
(d) $v = (1, 2, 1, 2)$, bázis: $(-1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -2, -2).$

5.5. Feladat. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ következő altereinek dimenzióját és egy bázisát.

(a) $U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)];$
(b) $U = [(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)];$
(c) $U = [(1, -1, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 4)].$

5.6. Feladat. Legyen V 10 dimenziós vektortér, U_1 8 dimenziós, U_2 9 dimenziós altér V-ben. Hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?

Szorgalmi feladatok

5.7. Feladat. Mit tudunk mondani a következő vektorrendszerről lineáris függetlenség szempontjából az x paraméter függvényében?

$$(1, -1, 2, 1), (-1, 0, 1, 1), (x, -1, 3, 2)$$

5.8. Feladat. Adjuk meg, mikor lesz lineárisan függő, illetve független a következő vektorrendszer az x valós paraméter függvényében.

$$(1,-1,2,1),(2,-1,x+3,x),(1,0,x+1,2x-2)$$

5.9. Feladat. Tegyük fel, hogy egy valós vektortérben a $v_1,\ldots,v_m$ vektoroknak csak véges sok lineáris kombinációja állítja elő a nullvektort. Következik-e ebből, hogy a vektorrendszer lineárisan független?

5.10. Feladat. Legyen $v_1,v_2,\ldots,v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazolja, hogy ez a vektor a nullvektor.

5.11. Feladat. Tegyük fel, hogy v_1,v_2,v_3 egyike sem a nullvektor. Mit állíthatunk v_1 és v_3 viszonyáról lineáris függőség, illetve függetlenség szempontjából, ha

(a) v_1,v_2 lineáris függő, v_2,v_3 lineárisan függő,
(b) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan függő,
(c) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan független?

5.12. Feladat. A v_1,v_2,v_3,v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1,v_2,v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

5.13. Feladat. Határozzuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy a következő vektorrendszer rangja a legkisebb legyen.

$$(3,2,6),(-1,2,1),(2,x,7)$$

5.14. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszer rangját az x paraméter függvényében.

$$(1,-1,2,1),(1,0,3,0),(2,-1,x+4,x^2-3x+3),(-1,4,x,x-6)$$

5.15. Feladat. Az x paraméter függvényében vizsgáljuk meg, hogy a következő vektorrendszer generátorrendszere-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek.

$$(1,-1,x),(x,0,1),(1,1,-2)$$

5.16. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:

(a) $(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(-1,x,2,1)$;
(b) $(-1,1,0,1),(x,1,2,1),(1,x,-1,2),(1,0,1,0)$.

5.17. Feladat. Adjunk meg bázist $\mathbb{R}^{100}$ alábbi altereiben, és határozzuk meg a dimeziójukat.

(a) $U_1=\{(x_1,\ldots,x_{100})\colon\ x_1=x_3=\cdots=x_{99}=0\}$;
(b) $U_2=\{(x_1,\ldots,x_{100})\colon\ x_1+x_2+\cdots+x_{50}=x_{51}+x_{52}+\cdots+x_{100}\}$.

5.18. Feladat. Legyenek a v vektor koordinátái a $v_1,\ldots,v_n$ bázisban: $(1\ \alpha_2\ \ldots\alpha_n)$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v,v_2,\ldots,v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

5.19. Feladat. Legyen $v_1,\ldots,v_n$ bázisa egy V vektortérnek. Adjunk meg olyan v vektort, melyre a $v_1+v,\ldots,v_n+v$ vektorrendszer nem bázis. Milyen v vektorok esetén lesz a $v_1+v,\ldots,v_n+v$ vektorrendszer bázis?

5.20. Feladat. Döntsük el, hogy meg lehet-e adni egy 99-dimenziós vektortérben két 50-dimenziós alteret úgy, hogy csak a nullvektor a közös elemük?