4. Feladatsor - Vektortér, altér, generálás

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok II. fej. $1, 2, 3, 6, 7$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, II. fej. $4, 5, 8, 9, 10$.

4.1. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi halmazok a megadott összeadásra és skalárral való szorzásra nézve valós vektorteret alkotnak-e.

(a) $\mathbb{R}^n$, ahol az összeadás és a skalárral való szorzás komponensenként történik;
(b) az összes, $\mathbb{Z}$-n értelmezett valós függvények a szokásos összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve;
(c) $\mathbb{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \alpha(a,b)=(\alpha a,b)$;
(d) $\mathbb{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \alpha(a,b)=(\alpha a,0)$;
(e) $\mathbb{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(b+d,a+b), \alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$.

4.2. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

(a) $U=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+2x_2-x_3=0\}$;
(b) $U=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-x_2+x_3=1, x_1+x_2+x_3=0\}$;
(c) $U=\{(x_1,x_2,x_3): 2x_1x_2+x_3=0\}$;
(d) $U=\{(x_1,x_2,x_3): x_1=0 \text{ vagy } x_2=0\}$;
(e) $U=\{(x_1,x_2,x_3): x_1=0 \text{ és } x_2=0\}$;
(f) $U=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_3^2=0\}$.

4.3. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az U altérnek.

(a) $v=(1,-1,1),\ U=[(1,-1,0),(0,0,1)]$;
(b) $v=(1,1,1),\ U=[(1,-1,2),(1,0,1)]$;
(c) $v=(1,2,1),\ U=[(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)]$;
(d) $v=(1,2,1),\ U=[(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)]$.

4.4. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1,1,1)$ és $(1,-1,5)$ vektorok által kifeszített alterét, azaz adjuk meg, hogy milyen összefüggésnek kell teljesülnie az x_1, x_2, x_3 számokra, hogy az (x_1,x_2,x_3) vektor benne legyen ebben az altérben.

Szorgalmi feladatok

4.5. Feladat. Igazoljuk, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^\lambda.$$

4.6. Feladat. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektortérben az alábbi halmazok?

(a) $U=\{A: |A|=0\}$;
(b) $U=\{A: |A|\neq 0\}$;
(c) $U=\{A: A^T=A\}$;
(d) $U=\{A: AB=BA\}$, ahol B egy adott mátrix.

4.7. Feladat. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha $v \neq \underline{0}$ és $\lambda v = \nu v$, akkor $\lambda = \nu$.
(b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda u = \lambda v$, akkor $u = v$.
(c) Ha $u \neq \underline{0}, v \neq \underline{0}, \lambda \neq 0, \nu \neq 0$ és $\lambda u = \nu v$, akkor $\lambda = \nu$ és $u = v$.

4.8. Feladat. Legyen W altér a valós számtest feletti V vektortérben, $u, v, w \in V$, és tegyük fel, hogy

$$u + v \in W, \quad v + 2w \notin W, \quad w + 3u \in W.$$

Mit állíthatunk az $5u + 3v + w$, illetve $6u + 3v + w$ vektorok és W kapcsolatáról?

4.9. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

4.10. Feladat. Legyen $U = [(1, 2, 1), (-1, 1, 1)], V = [(0, 3, 2), (-2, -1, 0)]$ két altere az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

4.11. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}, V = [(1, 2, 1)]$. Igaz-e, hogy $U = V$?

4.12. Feladat. Döntsük el, hogy az x paraméter mely értékei esetén lesz eleme az $(1, x + 2, -2)$ vektor az

$$[(1, 2, -x), (1, 1, 0), (-1, -3, x + 1)]$$

altérnek.

4.13. Feladat. Döntsük el, hogy az x paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $(2, -1, 1)$ vektor az

$$[(1, -1, 1), (1, 0, 1 - x), (-1, x + 1, -2)]$$

altérnek.