1. Feladatsor - Mátrixok

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V. fej. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V. fej. $7, 10$.

1.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB,\ BA,\ CB,\ BC,\ DC,\ CD,\ EB^T,\ BF,\ E^TA,$$
$$F^2,\ D^TC^T,\ (A+B)C,\ (A+B^T)D,\ AD+B^TD.$$

1.2. Feladat. Számítsuk ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3. Feladat. Adjuk meg az összes olyan valós mátrixot, amely A-val felcserélhető!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

1.5. Feladat. Szorozzuk össze az alábbi mátrixokat blokkosan.

(a) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

(b) $$\left(\begin{array}{r|rr|rr} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1.6. Feladat. Az alábbi blokkos felbontások közül mely esetben végezhető el a blokkos szorzás?

(a) $$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

(b) $$\left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

(c) $$\left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Szorgalmi feladatok

1.7. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P, illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1-es mátrix, mely A i. sorának j. elemét tartalmazza.

1.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

1.9. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$$

1.10. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

1.11. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük a főátlójában lévő elemek összegét. Jele: $\operatorname{tr} A$. Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

1.12. Feladat. Egy $n \times n$-es A mátrix főátlójában, és a főátló alatt minden elem 0. Bizonyítsuk be, hogy $A^n = 0$.

1.13. Feladat. Legyen A valós mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix főátlójában az elemek összege 0. Határozzuk meg A-t.

1.14. Feladat. Mi a feltétele annak, hogy egy mátrixszorzat két tényezőjét blokkokra bontva, a szorzás blokkokra bontva elvégezhető legyen.

1.15. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$-es mátrixok esetén.

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(b) $(AB)^T = A^T B^T$;
(c) $A^n A^m = A^{nm}$