Lineáris algebra gyak.

1. ZH

2011. március 23.

H csoport

---

1. (6 pont) Számolja ki az alábbiakat!

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = ?$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 12 & -14 \\ 0 & 14 & -17 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -14 \\ 14 & -17 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} -17 \cdot 12 + 14 \cdot 14 = -204 + 196 = -8$$

(1) : Kinullázom a 2. sort, azaz hozzáadom a 2. oszlop (-2)-szeresét a 3. oszlophoz.
(2) : Kifejtem a determinánst a 2. sora szerint.
(3) : Kinullázom az 1. oszlopot, azaz hozzáadom a 3. sor (-4)-szeresét az 1. és 2. sorhoz.
(4) : Kifejtem a determinánst az 1. oszlopa szerint.
(5) : A 2×2-es determináns definíciója alapján kiszámítom a determináns értékét.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & -1 \\ & & -3 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 2 & 4 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & -1 \\ & & -3 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -10 & 4 & 6 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 3y + z + 2w &= 1 \\ -2x - 5y - 2z - 3w &= -3 \\ -x - 2y + w &= 3 \\ 3x + 11y + 2z + 6w &= 4 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 11 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \overset{(6)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(7)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{(8)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

(6) : Kinullázom az 1.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom az 1. sor 2-szeresét a 2. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sort a 3. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sor (-3)-szorosát a 4. sorhoz.

(7) : Kinullázom a 2.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom a 2. sor (-1)-szeresét a 3. sorhoz,
- hozzáadom a 2. sor (-2)-szeresét a 4. sorhoz.

(8) : Kinullázom a 3.oszlopban lévő 1-es alatti elemet, azaz

- hozzáadom a 3. sort a 4. sorhoz.

Az egyenletnek nincs megoldása, mivel az utolsó sor ellentmondó.

3. (7 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek-e, generátorrendszerek-e, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

   (a) $(1,-3,0)\,,(1,1,-2)$

   (b) $(2,-1,3)\,,(0,2,9)\,,(-4,0,-15)$

   (c) $(1,2,3,4)\,,(-1,-1,-2,1)\,,(2,3,6,0)\,,(2,5,9,8)$

Megoldás:

(a) Gausselimináció nélkül is látszik, hogy a rang 2, mivel egyik sem a másik valamilyen konstansszorosa.
Lineárisan független, mivel a rangja annyi, ahány vektorból áll a vektorrendszer.
Nem generátorrendszer, mert a rang kisebb mint 3.
Ezekből már következik, hogy nem is bázis.

(b) $$\left(\begin{array}{ccc|} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ -4 & 0 & -15 \end{array}\right) \overset{(9)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right) \overset{(10)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

(9) : Kinullázom az 1.oszlopban lévő 2-es alatti elemeket, azaz hozzáadom az 1. sor 2-szeresét a 3. sorhoz.
(10) : Kinullázom a 2.oszlopban lévő 2-es alatti elemet, azaz hozzáadom a 2. sort a 3. sorhoz.

A Gauss-eliminációból látszik, hogy rang 2.
Lineárisan függő, mivel kisebb a rangja mint, ahány vektorból áll a vektorrendszer.
Nem generátorrendszer, mert a rang kisebb mint 3.
Ezekből már következik, hogy nem is bázis.

(c) $\left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 8 \end{array}\right) \overset{(11)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\overset{(12)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right) \overset{(13)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

(11) : Kinullázom az 1.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom az 1. sort a 2. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sor (-2)-szeresét a 3. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sor (-2)-szeresét a 4. sorhoz.

(12) : Kinullázom a 2.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom a 2. sort a 3. sorhoz,
- hozzáadom a 2. sor (-1)-szeresét a 4. sorhoz.

(13) : Kinullázom a 3.oszlopban lévő 1-es alatti elemet, azaz

- hozzáadom a 3. sor (-2)-szeresét a 4. sorhoz.

A Gauss-eliminációból látszik, hogy rang 4.
Lineárisan független, mivel a rangja annyi, ahány vektorból áll a vektorrendszer.
Generátorrendszer, mert a rang kisebb pontosan 4.
Ezekből már következik, hogy bázis.

4. (7 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert az a paraméter függvényében! (Hány megoldás van? Mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a^2+2)x_3 &= a \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & a^2+2 & a \end{array}\right) \overset{(14)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-2 & a+4 \end{array}\right) \overset{(15)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right)$$

(14) : Kinullázom az 1.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz hozzáadom az 1. sor (-2)-szeresét a 2. és a 3. sorhoz.
(15) : Kinullázom a 2.oszlopban lévő 1-es alatti elemet, azaz hozzáadom a 2. sor (-1)-szeresét a 3. sorhoz.

- Ha $a^2 - 1 = (a-1)(a+1) = 0$ és $a - 1 \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ez csak akkor teljesülhet, ha $a = -1$.

- Ha $a^2-1=(a-1)(a+1)=0$ és $a-1=0$, akkor végtelen sok megoldás van. Ez csak akkor teljesülhet, ha $a=1$. Ebben az esetben a végtelen sok megoldás a következő:

$$\begin{aligned} x_3 &\in \mathbb{R}, \\ x_2 &= 5+x_3, \\ x_1 &= -2-2x_3-x_2=-2-2x_3-5-x_3=-7-3x_3. \end{aligned}$$

- Ha $a\neq -1$ és $a\neq 1$, akkor egyetlen megoldás van (minden rögzített a-ra). Az Gauss-elimináció során kapott utolsó sort ekkor leoszthatjuk $(a-1)$-gyel, és az egyenletek visszafejtése után megkapjuk a megoldást:

$$x_3=\frac{1}{a+1}, \qquad x_2=5+\frac{1}{a+1}, \qquad x_1=-7-\frac{3}{a+1}.$$

5. (7 pont) Adja meg a v_1,v_2,v_3,v_4 vektorrendszer rangját (az a paramétertől függően), ha

$$\begin{aligned} v_1&=(1,-1,2,0)\,, & v_2&=(2,-1,7,-2)\,, \\ v_3&=(-3,4,-3,a-3)\,, & v_4&=(-1,0,-5,3a+2)! \end{aligned}$$

A paramétertől függően vizsgálja meg, hogy a v_1,v_2,v_3,v_4 vektorrendszer lineárisan független-e / generátorrendszer-e / bázis-e (az $\mathbb{R}^4$ vektortérben)!

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cccc|} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & -2 \\ -3 & 4 & -3 & a-3 \\ -1 & 0 & -5 & 3a+2 \end{array}\right) \overset{(16)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & a-3 \\ 0 & -1 & -3 & 3a+2 \end{array}\right) \overset{(17)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{array}\right)$$

$$\overset{(18)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right) \overset{(19)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

(16) : Kinullázom az 1.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom az 1. sor (-2)-szeresét a 2. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sor 3-szorosát a 3. sorhoz,
- hozzáadom az 1. sort a 4. sorhoz.

(17) : Kinullázom a 2.oszlopban lévő 1-es alatti elemeket, azaz

- hozzáadom a 2. sor (-1)-szeresét a 3. sorhoz,
- hozzáadom a 2. sort a 3. sorhoz.

(18) : Elosztom az utolsó sort 3-mal.

(19) : Hozzáadom a 4. sort a 3. sorhoz.

Ebből már látszik, hogy mindegy, hogy a-nak milyen értéket adunk, vagy csupa-nulla lesz az utolsó sor, és akkor elhagyhatom, vagy pedig a felette lévő 1-essel ki tudom nullázni. Így a rang független az a paramétertől, mindig 3. Így a vektorrendszer minden a esetén lineárisan függő, nem generátorrendszer és nem bázis.

6. (7 pont) Legyen az U egy altere a V vektortérnek. Legyen u, v, w három olyan vektor a V vektortérből, melyekre igaz, hogy

$$u - v - w,\ 2u + v \in U, \quad u \notin U.$$

Mit tud mondani a v és a $4u + 5v + 2w$ vektorokról? Benne vannak-e az U altérben?

Megoldás:

- Tudjuk, hogy $u \notin U$.
  Tegyük fel, hogy $v \in U$. Ekkor $-v$ is benne van az U altérben, mivel egy altér zárt a szorzásra. Egy altér zárt az összeadásra is, így $(-v) + (2u + v) \in U$, azaz $2u \in U$. Viszont ebből az következne, hogy $u \in U$, amiről tudjuk, hogy nem igaz. Így az alapfeltevésünk is hamis, tehát $v \notin U$.
- Ha egy vektor előáll $x_1 (u - v - w) + x_2 (2u + v)$ alakban, akkor benne van az U altérben, mivel az zárt az összeadásra és a szorzásra. Így meg kell oldanunk az

  $$x_1 (u - v - w) + x_2 (2u + v) = 4u + 5v + 2w$$

  egyenletet, vagyis felbontva a zárójelet:

  $$(x_1 + 2x_2)\, u + (-x_1 + x_2)\, v + (-x_1)\, w = 4u + 5v + 2w.$$

  Ezt átírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

  $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 5 \\ -x_1 &= 2. \end{aligned}$$

  Ennek pontosan egy megoldása van (nekünk elég, hogy egyáltalán van): $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$. Tehát a $4u+5v+2w$ vektor előáll két U-beli vektor lineáris kombinációjaként, tehát benne van az U altérben.
