Lineáris algebra gyak.

1. ZH

2011. március 23.

G csoport

---

1. (6 pont) Számolja ki az alábbiakat!

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = ? \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = ?$$

Megoldás:

- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2. (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y + 2w &= -1 \\ -x + 2y + 3z + w &= 2 \\ -3x + 5y + 7z + w &= 6 \\ 2x - 3y - 4z &= 4 \end{aligned}$$

Megoldás:

Az egyenletnek nincs megoldása.

3. (7 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek-e, generátorrendszerek-e, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

   (a) $(1, 3, -5), (2, 0, -3)$

   (b) $(-1, 2, -5), (2, 1, 0), (8, -1, 10)$

   (c) $(1, 0, 4, -5), (0, 1, 3, -2), (1, 2, 9, -10), (-1, -2, -4, 2)$

Megoldás:

(a) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

(b) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

(c) Rang $= 4 \implies$ Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

4. (7 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert az a paraméter függvényében! (Hány megoldás van? Mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + (a^2+6)x_3 &= a+3 \end{aligned}$$

Megoldás:

- Ha $a = -2$, akkor nincs megoldás.
- Ha $a = 2$, akkor végtelen sok megoldás van:

$$x_3 \in \mathbb{R}, \qquad x_2 = 3 - 2x_3, \qquad x_1 = 10 - 10x_3$$

- Ha $a \neq -2$ és $a \neq 2$, akkor egyetlen megoldás van (minden rögzített a-ra):

$$x_3 = \frac{1}{a+2}, \qquad x_2 = 3 - \frac{2}{a+2}, \qquad x_1 = 10 - \frac{10}{a+2}$$

5. (7 pont) Adja meg a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangját (az a paramétertől függően), ha

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,1,2)\,, \qquad v_2 = (-2,-1,0,-5)\,, \\ v_3 &= (1,4,7,a-1)\,, \qquad v_4 = (2,1,0,4-a)! \end{aligned}$$

A paramétertől függően vizsgálja meg, hogy a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független-e / generátorrendszer-e / bázis-e (az $\mathbb{R}^4$ vektortérben)!

Megoldás:

A rang nem függ a paramétertől, mindig 3. Így a vektorrendszer minden a esetén lineárisan függő, nem generátorrendszer és nem bázis.

6. (7 pont) Legyen az U egy altere a V vektortérnek. Legyen u, v, w három olyan vektor a V vektortérből, melyekre igaz, hogy

$$u + v + w,\ 3u - v \in U, \quad v \notin U.$$

Mit tud mondani az u és az $u - 3v - 2w$ vektorokról? Benne vannak-e az U altérben?

Megoldás:

- $u \notin U$
- $u - 3v - 2w \in U$

Lineáris algebra gyak.

1. ZH

2011. március 23.

H csoport

---

1. (6 pont) Számolja ki az alábbiakat!

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} =? \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T =?$$

Megoldás:

- $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8$
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

2. (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 3y + z + 2w &= 1 \\ -2x - 5y - 2z - 3w &= -3 \\ -x - 2y + w &= 3 \\ 3x + 11y + 2z + 6w &= 4 \end{aligned}$$

Megoldás:

Az egyenletnek nincs megoldása.

3. (7 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek-e, generátorrendszerek-e, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

(a) $(1, -3, 0), (1, 1, -2)$

(b) $(2, -1, 3), (0, 2, 9), (-4, 0, -15)$

(c) $(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -2, 1), (2, 3, 6, 0), (2, 5, 9, 8)$

Megoldás:

(a) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

(b) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

(c) Rang $= 4 \implies$ Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

4. (7 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert az a paraméter függvényében! (Hány megoldás van? Mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a^2+2)x_3 &= a \end{aligned}$$

Megoldás:

- Ha $a = -1$, akkor nincs megoldás.
- Ha $a = 1$, akkor végtelen sok megoldás van:

$$x_3 \in \mathbb{R}, \qquad x_2 = 5 + x_3, \qquad x_1 = -7 - 3x_3$$

- Ha $a \neq -1$ és $a \neq 1$, akkor egyetlen megoldás van (minden rögzített a-ra):

$$x_3 = \frac{1}{a+1}, \qquad x_2 = 5 + \frac{1}{a+1}, \qquad x_1 = -7 - \frac{3}{a+1}$$

5. (7 pont) Adja meg a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangját (az a paramétertől függően), ha

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,-1,2,0)\,, & v_2 &= (2,-1,7,-2)\,, \\ v_3 &= (-3,4,-3,a-3)\,, & v_4 &= (-1,0,-5,3a+2)! \end{aligned}$$

A paramétertől függően vizsgálja meg, hogy a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független-e / generátorrendszer-e / bázis-e (az $\mathbb{R}^4$ vektortérben)!

Megoldás:

A rang nem függ a paramétertől, mindig 3. Így a vektorrendszer minden a esetén lineárisan függő, nem generátorrendszer és nem bázis.

6. (7 pont) Legyen az U egy altere a V vektortérnek. Legyen u, v, w három olyan vektor a V vektortérből, melyekre igaz, hogy

$$u - v - w,\ 2u + v \in U, \quad u \notin U.$$

Mit tud mondani a v és a $4u + 5v + 2w$ vektorokról? Benne vannak-e az U altérben?

Megoldás:

- $v \notin U$
- $4u + 5v + 2w \in U$

Lineáris algebra gyak.

1. ZH

2011. március 23.

I csoport

---

1. (6 pont) Számolja ki az alábbiakat!

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =? \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^T =?$$

Megoldás:

- $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$
- $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

2. (6 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y + 3z + 2w &= -4 \\ 2x - y + 7z + 6w &= -9 \\ x + y + 6z + 3w &= -4 \\ -x + 4y - z + 7w &= 8 \end{aligned}$$

Megoldás:

Az egyenletnek nincs megoldása.

3. (7 pont) Döntse el a következő vektorrendszerekről, hogy lineárisan függetlenek-e, generátorrendszerek-e, bázisok-e! (Természetesen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben vizsgálja a vektorrendszereket!)

   (a) $(1, 0, -7), (2, 3, 8)$

   (b) $(1, 1, -3), (2, 0, 1), (0, 2, -7)$

   (c) $(1, 1, 0, 5), (1, 2, -3, 7), (2, 0, 7, 7), (-2, -1, -5, -9)$

Megoldás:

(a) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.

(b) Rang $= 2 \implies$ Lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

(c) Rang $= 4 \implies$ Lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

4. (7 pont) Oldja meg a következő egyenletrendszert az a paraméter függvényében! (Hány megoldás van? Mik a megoldások?)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 8x_2 + (a^2 - 9)x_3 &= a - 5 \end{aligned}$$

Megoldás:

- Ha $a = -3$, akkor nincs megoldás.
- Ha $a = 3$, akkor végtelen sok megoldás van:

$$x_3 \in \mathbb{R}, \qquad x_2 = 2 + x_3, \qquad x_1 = -7 - 4x_3$$

- Ha $a \neq -3$ és $a \neq 3$, akkor egyetlen megoldás van (minden rögzített a-ra):

$$x_3 = \frac{1}{a+3}, \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{a+3}, \qquad x_1 = -7 - \frac{4}{a+3}$$

5. (7 pont) Adja meg a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangját (az a paramétertől függően), ha

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 3, -2), \qquad v_2 = (1, 3, 7, 2), \\ v_3 &= (3, 4, 1, a - 11), \qquad v_4 = (2, 3, 2, 2a - 2)! \end{aligned}$$

A paramétertől függően vizsgálja meg, hogy a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független-e / generátorrendszer-e / bázis-e (az $\mathbb{R}^4$ vektortérben)!

Megoldás:

- Ha $a = -3$, akkor a rang 2.
- Ha $a \neq -3$, akkor a rang 3.

  Mindkét esetre igaz, hogy a vektorrendszer lineárisan függő, nem generátorrendszer és nem bázis.

6. (7 pont) Legyen az U egy altere a V vektortérnek. Legyen u, v, w három olyan vektor a V vektortérből, melyekre igaz, hogy

$$u - v + w,\ 4u + w \in U, \quad w \notin U.$$

Mit tud mondani az u és a $-2u - 2v + w$ vektorokról? Benne vannak-e az U altérben?

Megoldás:

- $u \notin U$
- $-2u - 2v + w \in U$
