

# Lineáris algebra gyak.

## 1. röpdolgozat

2011 március 2.

### A csoport

1. (4 pont) Határozza meg az  $A \cdot C$  és a  $2A + B^T$  mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 2 \\ & & 3 & 0 \\ \hline 6 & 0 & 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 & 5 & 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ -3 & 2 & (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{array} \implies AC = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 14 & 2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A + B^T &= 2 \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 10 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 11 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (6 pont) Számolja ki az alábbi determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}!$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 1 - 2 \cdot (-5) = -9 + 10 = 1$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} &\stackrel{(1)}{=} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - [(-3) \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)] + [(-3) \cdot (-1) - 3 \cdot (-3)] \\ &= -(9 + 1) + (3 + 9) = -10 + 12 = 2 \end{aligned}$$

(1) : Kifejtem a determinánst a 2. sora szerint.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &\stackrel{(2)}{=} 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{(4)}{=} -1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = - [(-2) \cdot (-11) - 5 \cdot 5] \\
&= -(22 - 25) = 3
\end{aligned}$$

(2) : Kifejtem a determinánst az 1. oszlopa szerint.

(3) : Kinullázom az utolsó sort, azaz

- hozzáadom az 1. oszlopot a 2. oszlophoz, és
- hozzáadom az 1. oszlop  $(-2)$ -szeresét a 3. oszlophoz.

(4) : Kifejtem a determináns a 3. sora szerint.

- Bónusz feladat. (+2 pont) Számolja ki a következő determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} !$$

**Megoldás:**

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} &\stackrel{(5)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & -7 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{(7)}{=} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 & -9 \\ -5 & -1 & 0 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{(8)}{=} - \begin{vmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -5 & -1 & -7 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{(9)}{=} \begin{vmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{(10)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{(11)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot 13 - (-1) \cdot 4 = 4
\end{aligned}$$

(5) : Kinullázom az 1. sort, azaz

- hozzáadom az 5. oszlopot a 2. oszlophoz, és
- hozzáadom az 5. oszlop 2-szeresét a 4. oszlophoz.

- (6) : Kifejtem a determinánst az első sora szerint (a felesleges szorzókat nem írtam ki).
- (7) : Kinullázom a 3. oszlopot, azaz
- hozzáadom a 4. sort a 3. sorhoz, és
  - hozzáadom a 4. sort a 2. sorhoz, és
  - hozzáadom a 4. sor 2-szeresét az 1. sorhoz.
- (8) : Kifejtem a determinánst a 3. oszlopa szerint.
- (9) : A konstans  $(-1)$  szorzót beviszem a determináns utolsó sorába.
- (10) : Kinullázom az 1. oszlopot, azaz
- hozzáadom a 3. sor 5-szörösét a 2. sorhoz, és
  - hozzáadom a 3. sor 2-szeresét az 1. sorhoz.
- (11) : Kifejtem a determinánst az 1. oszlopa szerint.