Válogatott nehezebb feladatok az utolsó gyakorlatra

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n.$$

2. Feladat. Legyen A egy valós elemű mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix főátlójában az elemek összege 0. Határozzuk meg A-t.

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánst:

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

4. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely, nem 0 értékű determináns első sorában található olyan elem, amit le lehet úgy cserélni, hogy a determináns már 0 legyen.

5. Feladat. Adja meg a következő lineáris egyenletrendszer áltatlános megoldását!

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & \dots & + & a_nx_n & = & b \\ a_1^2x_1 & + & a_2^2x_2 & + & \dots & + & a_n^2x_n & = & b^2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_1^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-1}x_2 & + & \dots & + & a_n^{n-1}x_n & = & b^{n-1} \end{array}$$

6. Feladat. Adja meg a következő lineáris egyenletrendszer áltatlános megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 &= 1 \\ x_1 + (1-a)x_3 + (a-1)x_4 &= 2 \\ x_1 - ax_3 + (a-2)x_4 &= 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 &= 3a-1 \end{aligned}$$

7. Feladat. Legyen V az egész számok halmaza a szokásos összeadással, valamint $T = \mathbb{Q}$. A skalárral való szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$\lambda \odot v = \lfloor \lambda v \rfloor,$$

ahol $\lfloor\ \rfloor$ a szám alsó egészrészét jelöli. Vektorteret kapunk-e így?

8. Feladat. Legyen W altér a valós számtest feletti V vektortérben, $u, v, w \in V$, és tegyük fel, hogy

$$u + v \in W, \quad v + 2w \notin W, \quad w + 3u \in W.$$

Mit állíthatunk az $5u + 3v + w$, illetve $6u + 3v + w$ vektorok és W kapcsolatáról?

9. Feladat. Igazoljuk, hogy a valós együtthatójú polinomok vektortere nem véges dimenziós, vagyis nem adható meg benne véges sok vektorból álló generátorrendszer.

10. Feladat. Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázisa egy V vektortérnek. Adjunk meg egy olyan V vektort, melyre a $v_1+v, \dots, v_n+v$ vektorrendszer nem bázis! Milyen v vektorok esetén lesz a $v_1+v, \dots, v_n+v$ vektorrendszer bázis?

11. Feladat. Véges dimenziós-e az $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektortér, ahol

$$u \oplus v = uv, \quad \alpha \odot v = v^\alpha?$$

12. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

1. Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
2. Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
3. Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
4. Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
5. Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
6. Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns nulla.
7. Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns nulla, akkor végtelen sok megoldás van.

13. Feladat. Hány maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsa van az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Feladat. Az x paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi ráfordítási mátrixszal megadott gazdaság produktív?

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & x \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

15. Feladat. Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy a rögzített árrendszer a $(10, 15, 5)$ vektorral adható meg. Mely ágazatok nyereségesek illetve veszteségesek? Próbáljunk meghatározni egy olyan árrendszert, amelyben a gazdaságban nem lesz veszteséges ágazat. Milyen árak mellett lesz a gazdaság össznyeresége maximális (feltéve, hogy minden ágazat ugyanakkora kibocsátással rendelkezik)?

16. Feladat. Az a paraméter milyen értékei esetén sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

17. Feladat. Oldja meg a következő mátrixegyenletet!

$$X \cdot \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 5 & a^2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$