Példa paraméteres egyenletrendszer megoldására

Lineáris algebra
gyakorlat

Összeállította:
Bogya Norbert

Feladat

Feladat

Adja meg az

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x + 3y - 5z &= 5 \\ x + (p+1)y + (1-2p)z &= 2p + 4 \\ -x - y + (p^2 - 3)z &= 2p + 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását a p paraméter függvényében.

Megoldás I.
Gauss-elimináció I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás I.
Gauss-elimináció I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sor (-2)-szeresét hozzáadom a második sorhoz:

Megoldás I.
Gauss-elimináció I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sor (-2)-szeresét hozzáadom a második sorhoz:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right)$$

Megoldás II.
Gauss-elimináció II.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sor (-1)-szeresét hozzáadom a harmadik sorhoz:

Megoldás II.
Gauss-elimináció II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & p+1 & 1-2p & 2p+4 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sor (-1)-szeresét hozzáadom a harmadik sorhoz:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás III.
Gauss-elimináció III.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sort hozzáadom a negyedik sorhoz:

Megoldás III.
Gauss-elimináció III.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ -1 & -1 & p^2-3 & 2p+2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az első sort hozzáadom a negyedik sorhoz:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right)$$

Megoldás IV.
Gauss-elimináció IV.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás IV.

Gauss-elimináció IV.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

A második sor $(-p)$-szeresét hozzáadom a harmadik sorhoz:

Megoldás IV.
Gauss-elimináció IV.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & p & 2-2p & 2p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

A második sor $(-p)$-szeresét hozzáadom a harmadik sorhoz:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2+p & p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right)$$

Megoldás V.
Gondolkodós rész I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2+p & p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás V.
Gondolkodós rész I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2+p & p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az utolsó sort alakítsuk szorzattá:

Megoldás V.
Gondolkodós rész I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2+p & p+2 \\ 0 & 0 & p^2-4 & 2p+4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Az utolsó sort alakítsuk szorzattá:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & (p-2)(p+2) & 2(p+2) \end{array}\right)$$

Megoldás VI.
Gauss-elimináció V.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & (p-2)(p+2) & 2(p+2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás VI.
Gauss-elimináció V.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & (p-2)(p+2) & 2(p+2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

A harmadik sor $(p-2)$-szeresét vonjuk le a negyedik sorból:

Megoldás VI.
Gauss-elimináció V.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & (p-2)(p+2) & 2(p+2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

A harmadik sor $(p-2)$-szeresét vonjuk le a negyedik sorból:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(p+2)-(p+2)(p-2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Megoldás VI.
Gauss-elimináció V.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & (p-2)(p+2) & 2(p+2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

A harmadik sor $(p-2)$-szeresét vonjuk le a negyedik sorból:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(p+2)-(p+2)(p-2) \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

Megoldás VII.
Gondolkodós rész II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

Megoldás VII.
Gondolkodós rész II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Az utolsó sor „majdnem ellentmondó", ezért nézzük, mikor kapunk ellentmondó sort.

Megoldás VII.
Gondolkodós rész II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Az utolsó sor „majdnem ellentmondó”, ezért nézzük, mikor kapunk ellentmondó sort.
- Nyilván akkor, ha az utolsó sor utolsó eleme nem nulla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Az utolsó sor „majdnem ellentmondó”, ezért nézzük, mikor kapunk ellentmondó sort.
- Nyilván akkor, ha az utolsó sor utolsó eleme nem nulla.

$$-p^2+2p+8=-(p+2)(p-4)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Az utolsó sor „majdnem ellentmondó", ezért nézzük, mikor kapunk ellentmondó sort.
- Nyilván akkor, ha az utolsó sor utolsó eleme nem nulla.

$$-p^2+2p+8=-(p+2)(p-4)$$

- Az utolsó sor akkor ellentmondó, ha $p \neq -2$ és $p \neq 4$.

Megoldás VII.
Gondolkodós rész II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Az utolsó sor „majdnem ellentmondó”, ezért nézzük, mikor kapunk ellentmondó sort.
- Nyilván akkor, ha az utolsó sor utolsó eleme nem nulla.

$$-p^2+2p+8 = -(p+2)(p-4)$$

- Az utolsó sor akkor ellentmondó, ha $p \neq -2$ és $p \neq 4$.
- Tehát, ha $p \neq -2$ és $p \neq 4$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megoldás VIII.
Gondolkodós rész III.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

Megoldás VIII.
Gondolkodós rész III.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Két lehetséges eset maradt: $p = -2$ vagy $p = 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Két lehetséges eset maradt: $p = -2$ vagy $p = 4$.
- Nézzük a $p = -2$ esetet. Helyettesítsünk be a bővített mátrixba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Két lehetséges eset maradt: $p = -2$ vagy $p = 4$.
- Nézzük a $p = -2$ esetet. Helyettesítsünk be a bővített mátrixba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Megoldás IX.
Visszafejtés I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Megoldás IX.
Visszafejtés I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x és az y kötött ismeretlen, a z szabad ismeretlen, ebből következik, hogy végtelen sok megoldás lesz.

Megoldás IX.
Visszafejtés I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x és az y kötött ismeretlen, a z szabad ismeretlen, ebből következik, hogy végtelen sok megoldás lesz.
- Mivel z szabad ismeretlen, értéke tetszőleges: $z \in \mathbb{R}$.

Megoldás IX.
Visszafejtés I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x és az y kötött ismeretlen, a z szabad ismeretlen, ebből következik, hogy végtelen sok megoldás lesz.
- Mivel z szabad ismeretlen, értéke tetszőleges: $z \in \mathbb{R}$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3z + 1$.

Megoldás IX.
Visszafejtés I.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x és az y kötött ismeretlen, a z szabad ismeretlen, ebből következik, hogy végtelen sok megoldás lesz.
- Mivel z szabad ismeretlen, értéke tetszőleges: $z \in \mathbb{R}$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3z + 1$.
- Az első sor azt mondja, hogy $x + y - z = 2$, azaz $x = 2 + z - y$, tehát $x = 2 + z - 3z - 1 = -2z + 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x és az y kötött ismeretlen, a z szabad ismeretlen, ebből következik, hogy végtelen sok megoldás lesz.
- Mivel z szabad ismeretlen, értéke tetszőleges: $z \in \mathbb{R}$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3z + 1$.
- Az első sor azt mondja, hogy $x + y - z = 2$, azaz $x = 2 + z - y$, tehát $x = 2 + z - 3z - 1 = -2z + 1$.
- Tehát $p = -2$ esetén a megoldás:

$$(-2z + 1, 3z + 1, z)\,.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

Megoldás X.
Gondolkodós rész IV.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Egy lehetséges eset maradt: $p = 4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Egy lehetséges eset maradt: $p = 4$.
- Nézzük ezt az esetet. Helyettesítsünk be a bővített mátrixba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+2 \\ 0 & 0 & 0 & -p^2+2p+8 \end{array}\right)$$

- Egy lehetséges eset maradt: $p = 4$.
- Nézzük ezt az esetet. Helyettesítsünk be a bővített mátrixba:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x, y, z ismeretlenek mind kötöttek, így egyetlen megoldás lesz.

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x, y, z ismeretlenek mind kötöttek, így egyetlen megoldás lesz.
- Az utolsó sor azt mondja, hogy $z = 1$.

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x, y, z ismeretlenek mind kötöttek, így egyetlen megoldás lesz.
- Az utolsó sor azt mondja, hogy $z = 1$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3 + 1 = 4$.

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x, y, z ismeretlenek mind kötöttek, így egyetlen megoldás lesz.
- Az utolsó sor azt mondja, hogy $z = 1$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3 + 1 = 4$.
- Az első sor azt mondja, hogy $x + y - z = 2$, azaz $x = 2 + z - y$, tehát $x = 2 + 1 - 4 = -1$.

Megoldás XI.
Visszafejtés II.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Az x, y, z ismeretlenek mind kötöttek, így egyetlen megoldás lesz.
- Az utolsó sor azt mondja, hogy $z = 1$.
- A második sor azt mondja, hogy $y - 3z = 1$, azaz $y = 3 + 1 = 4$.
- Az első sor azt mondja, hogy $x + y - z = 2$, azaz $x = 2 + z - y$, tehát $x = 2 + 1 - 4 = -1$.
- Tehát $p = 4$ esetén a megoldás:

$$(-1, 4, 1)\,.$$

Megoldás XII.
Összefoglalás

	x	y	z
$p = 4$	-1	4	1
$p = -2$	$-2z + 1$	$3z + 1$	z
$p \neq -2$ vagy $p \neq 4$	Nincs megoldás.		