4. GYAKORLAT

Vektortér, altér, generálás.

1. Vektortér

1. Definíció. Egy $(V, +, \cdot)$ hármas struktúrát vektortérnek nevezzük, ha

- V egy olyan halmaz,
- amin értelmezve van egy " $+$ " összeadás, azaz elemeit össze lehet adni,
- és értelmezve van rajta egy " $\cdot$ " szorzás művelet, azaz V elemeit meg lehet szorozni tetszőleges valós számmal,
- továbbá ezek a műveletek teljesítik az alábbi 8 tulajdonságot:
  1. Tetszőleges $u, v, w \in V$ elemek esetén $u + (v + w) = (u + v) + w$, vagyis az összeadás asszociatív.
  2. Tetszőleges $u, v \in V$ elemek esetén $u + v = v + u$, vagyis az összeadás kommutatív.
  3. Létezik (az) additív egységelem (zéruselem), azaz létezik olyan $\underline{0} \in V$ elem, hogy tetszőleges $u \in V$ esetén $\underline{0} + u = u + \underline{0} = u$.
  4. V minden elemének létezik additív inverze, azaz minden $u \in V$ esetén létezik egy V-beli $-u$ elem úgy, hogy $u + (-u) = \underline{0}$.
  5. Tetszőleges $u \in V$ elem esetén $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.
  6. Tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ valós számokra és tetszőleges $u \in V$ elemre teljesül, hogy $(cd) \cdot u = c \cdot (d \cdot u)$.
  7. Tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ valós számokra és tetszőleges $u \in V$ elemre teljesül, hogy $(c+d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$.
  8. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós számra és tetszőleges $u, v \in V$ elemekre teljesül, hogy $c \cdot (u+v) = c \cdot u + c \cdot v$.

2. *Észrevétel.* Egy vetortér megadásához nem elég egy halmazt megadni, pontosan definiálni kell a két műveletet is úgy, hogy teljesüljön a 8 axióma.

3. Példa. Példák vektorterekre.

1. A síkon az origóból kiinduló vektorok a szokásos vektorösszeadássalm és skalárral való szorzással vektorteret alkot.
2. Az előző példában a vektorok tudjuk, hogy azonosíthatók egy (a, b) számpárral, így megtartva a fenti műveleteket, tetszőleges szám n-esekre is vektorteret kapunk, a vektortér ekkor: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
3. Ha $n = 1$, akkor a valós számok halmazát kapjuk, ez is vektortér, az ismert összeadással, és szorzással.
4. A valós számokból álló $(m \times n)$-es méretű mátrixok, a mátrixoknál megtanult összeadással és skaláris szorzással vektorteret alkot.
5. A valós együtthatós polinomok a rájuk vonatkozó összeadással és skaláris szorzással vektorteret alkot.
6. ...

4. Tétel (A vektortéraxiómák közvetlen következményei)**.**

1. *A V vektortér zéruseleme egyértelmű.*
2. *A V vektortér bármely elemének egyetlen additív inverze van.*
3. *A V vektortér bármely v elemére $0v = \underline{0}$.*
4. *Bármely c valós szám esetén $c \cdot \underline{0} = \underline{0}$.*
5. *Ha c valós szám, v pedig a V vektortér egy eleme, akkor $c \cdot v = \underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $c = 0$, vagy $v = \underline{0}$.*
6. *A V vektortér minden v elemére teljesül, hogy $(-1) \cdot v = -v$.*
7. *A V vektortér minden v elemére, és tetszőleges c valós számra teljesül, hogy $(-c) \cdot v = -cv$.*

1.1. Altér

5. Definíció. A V vektortér egy nemüres U részhalmazát altérnek nevezzük, ha U is vektortér, azaz U zárt a V-től örökölt összeadásra és szorzásra nézve.

6. Példa. Példák alterekre.

1. Bármely V vektortér esetén a $\{\underline{0}\}$ és a V altere V-nek.
2. Ha a V vektortér a síkbeli origóból induló helyvektorok tere, akkor tetszőleges, az origóra átmenő egyenesre eső origóból induló vektorok alteret alkotnak V-ben.

1.2. Generálás

7. Definíció. Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Legyenek továbbá $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a

$$v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$$

vektort a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

8. Definíció. Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a

$$[v_1, \ldots, v_n] = \{c_1v_1 + \ldots + c_nv_n : c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_iv_i : c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz alteret alkot V-ben, és ezt a halmazt a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer által generált altérnek nevezzük, és $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$-vel jelöljük.

9. Definíció. Legyen V egy vektortér, U egy altere V-nek, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszert az U altér generátorrendszerének nevezzük, ha $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = U$.