1. GYAKORLAT

Mátrixok, mátrixműveletek.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M mátrix egy valós számokból álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m\times n}$-nel jelöljük. Az M mátrix i-edik sorának j-edik elemét m_{ij}-vel jelöljük.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

1.1. Nevezetes mátrixok

3. Definíció. Az $(n \times n)$-es egységmátrix olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Definíció. Az $(n \times n)$-es nullmátrix olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

5. Definíció. Legyen A és B két valós számokból álló $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor $A+B$ és $c\cdot A$ egy-egy $(m\times n)$-es mátrix, és tetszőleges elemük a következőképpen számítható ki:

$$(A+B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) \text{ és } (c\cdot A)_{ij} = (ca_{ij}) \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

azaz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

és

$$c\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

6. *Észrevétel.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni.

7. Példa. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad (-2) \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

8. Definíció. Legyen $A_{m\times n}$ és $B_{n\times k}$ két valós számokból álló mátrix. Ekkor $A \cdot B$ egy $(m \times k)$-as mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$AB_{ij} = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right).$$

Az A mátrix i. sorvektorának és a B mátrix j. oszlopvektorának belső szorzata adja meg a szorzatmátrix i-edik sorának j-edik elemét:

$$AB_{ij} = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}) \rangle = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

9. *Észrevétel.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megyegyezik a második mátrix sorainak számával.

10. *Észrevétel.* AB általában nem egyezik meg BA-val, sőt még lehet, hogy a méretük miatt nincs is értelmezve.

11. Tétel. *Legyen A egy tetszőleges valós számokból álló $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor*

- $I_n A = A I_n = A$ *és*
- $O_n A = A O_n = O_n$.

12. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Az AB mátrix (2×2)-es méretű lesz. A példabeli mátrixokból AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle 1.\text{ sor}, 1.\text{ oszlop}\rangle & \langle 1.\text{ sor}, 2.\text{ oszlop}\rangle \\ \langle 2.\text{ sor}, 1.\text{ oszlop}\rangle & \langle 2.\text{ sor}, 2.\text{ oszlop}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle (2,-3,5), (6,2,-3)\rangle & \langle (2,-3,5), (-1,-2,0)\rangle \\ \langle (1,0,8), (6,2,-3)\rangle & \langle (1,0,8), (-1,-2,0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (5,4,-2), (-1,0,-5)\rangle & \langle (5,4,-2), (-2,8,7)\rangle & \langle (5,4,-2), (3,3,9)\rangle \\ \langle (-9,4,6), (-1,0,-5)\rangle & \langle (-9,4,6), (-2,8,7)\rangle & \langle (-9,4,6), (3,3,9)\rangle \\ \langle (3,1,-2), (-1,0,-5)\rangle & \langle (3,1,-2), (-2,8,7)\rangle & \langle (3,1,-2), (3,3,9)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+0+10 & -10+32-14 & 15+12-18 \\ 9+0-30 & 18+32+42 & -27+12+54 \\ -3+0+10 & -6+8-14 & 9+3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14. Definíció. Legyen A egy valós számokból álló $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$-es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival.

15. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \ B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \ C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

2.1. Műveleti tulajdonságok

16. Tétel. *Műveletek tulajdonságai.*

Legyenek A, B, C valós számokból álló mátrixok, és $c, d \in \mathbb{R}$ skalárok. Ekkor

- $A+B=B+A$ (kommutativitás)
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (asszociativitás)
- $A(BC)=(AB)C$ (asszociativitás)
- $A(B+C)=AB+AC$ (disztributivitás balról)
- $(A+B)C=AC+BC$ (disztributivitás jobbról)
- $(c+d)A=cA+dA$
- $c(A+B)=cA+cB$
- $c(AB)=(cA)B$
- $\left(A^T\right)^T=A$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(cA)^T=c\left(A^T\right)$

17. *Észrevétel.* Természetesen az " = " azt jelenti, hogy ha az egyik oldala értelmezve van, akkor a másik oldala is értelmezve van, és a két oldal ugyanazt az eredményt adja.

2.2. Hatványozás

18. Definíció. Legyen A egy valós számokból álló $(m\times m)$-es (négyzetes) mátrix. Ekkor A^n egy $(m\times m)$-es mátrix, mely a következőképpen számítható ki:

$$A^n \quad = \quad \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{(n\text{-szer})}.$$

19. Tétel. *Hatványozás azonosságai.*
Legyen $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times m}$ egy valós számokból álló $(m\times m)$-es (négyzetes) mátrix. Ekkor

- $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$ *és*
- $\left(A^k\right)^l=A^{kl}$.

3. Blokkosítás

20. Definíció. Ha egy mátrixot több kisebb részmátrixra (blokkra) bontunk függőleges és vízszintes vonalakkal, akkor a mátrix blokkosításáról beszélünk.

21. Példa. Ha $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{pmatrix}$, akkor ennek különböző blokkosításai például

$$B_1=\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{array}\right) \text{ és } B_2=\left(\begin{array}{c|cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{array}\right).$$