5. GYAKORLAT

Lineáris függetlenség. Rang. Bázis.

Emlékeztető

1. Definíció. Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Legyenek továbbá $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a

$$v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = \sum_{i=1}^{n} c_iv_i$$

vektort a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

2. Definíció. Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a

$$[v_1, \ldots, v_n] = \{c_1v_1 + \ldots + c_nv_n : c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} c_iv_i : c_i \in \mathbb{R}\right\}$$

halmaz alteret alkot V-ben, és ezt a halmazt a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer által generált altérnek nevezzük, és $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$-vel jelöljük.

3. Definíció. Legyen V egy vektortér, U egy altere V-nek, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszert az U altér generátorrendszerének nevezzük, ha $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = U$.

1. Lineáris függetlenség

4. Definíció. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \ldots, c_n$ valósz számok esetén,

$$\text{ha } c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = \underline{0}, \text{ akkor } c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

5. Példa. Ha $v_1 = (0, 1, 2)$ és $v_2 = (0, -3, -6)$, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan függő, mert $1 \cdot v_1 + \frac{1}{3}v_2 = \underline{0}$ és $1 \neq 0$ valamint $\frac{1}{3} \neq 0$.

6. Tétel (Általánosított példák).

- *Ha a vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$-t, akkor lineárisan függő.*
- *Ha a vektorrendszer egyik vektora egy másik vektorrendszerbeli vektor skalárszorosa, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.*
- *Ha a vektorrendszer egyik vektora előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.*

7. Tétel. *Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha az egyik vektora előáll a többi vektorának lineáris kombinációjaként.*

8. Tétel.

- *Lineárisan független vektorrendszernek bármely részrendszere lineárisan független.*
- *Ha egy vektorrendszer valamelyik részrendszere lineárisan függő, akkor a vektorrendszer is lineárisan függő.*

1.1. Lineáris függetlenség determinánssal - kiegészítés

9. Tétel (Cramer-szabály (emlékeztető))**.** *Ha egy szabályos egyenletrendszer együtthatóiból álló mátrix determinánsa nem nulla, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.*

10. *Észrevétel.* Ha egy $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer vektorai n komponensből állnak, akkor az előbbi tétel értelmében a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a belőlük alkotott determináns értéke nem nulla.

2. Rang

11. Definíció. Egy $v_1, \dots v_n$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerének nevezzük egy részrendszerét, ha már nem tudjuk úgy bővíteni vektorrendszerbeli vektorokkal, hogy továbbra is lineárisan független maradjon.

12. Definíció (Rang)**.** Egy $v_1, \dots v_n$ vektorrendszer rangja a legnagyobb maximális lineárisan független részrendszerének elemszámát, vagyis a rang az r egész szám, ha

1. kiválasztható $v_1, \dots v_n$ közül r darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrrendszert alkossanak, de
2. nem választható ki $v_1, \dots v_n$ közül $r+1$ darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrrendszert alkossanak.

13. *Észrevétel.* Egy n elemű vektorrendszer rangja legfeljebb n, és pontosan akkor n, ha az egész vektorrendszer lineárisan független.

14. Tétel.

- *Egy vektorrendszer maximálisan lineárisan független részrendszerének lineáris kombinációjaként előáll a többi vektora.*
- *Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor r darab lineárisan független vektort kiválasztva a vektorrendszerből, ezek lineáris kombinációjaként a vektorrendszer összes eleme megkapható.*

15. Tétel.

- *Ha egy vektorrendszert bővítünk egy olyan vektorral, ami előáll a vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszert rangja nem változik.*
- *Ha egy vektorrendszerből elhagyunk egy olyan vektort, ami előáll a vektorrendszer többi elemének lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszert rangja nem változik.*

16. Tétel (Rang kiszámolásához használható tétel)**.** *Ha egy vektorrendszer valamelyik vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának valamilyen konstansszorosát, vagy valamelyik vektorát megszorozzuk egy nemnulla konstanssal, akkor a vektorrendszer rangja nem változik.*

17. *Észrevétel.* Ha egy k-elemű vektorrendszer rangja k, akkor a vektorrendszer lineárisan független, egyébként (azaz, ha kisebb, mint k, akkor) függő.

18. Példa. Számoljuk ki a $(1, 2, 0, 5), (3, 0, -6, -1), (2, 1, -3, 2)$ vektorrendszer rangját!

$$\left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & -6 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

A Gausseliminácó során két sor maradt, tehát a vektorrendszer rangja 2. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb két lineárisan független vektor választható ki a vektorrendszerből, például a megmaradt soroknak megfelelő vektorok: $(1, 2, 0, 5)$ és $(3, 0, -6, -1)$.

3. Bázis

19. Definíció. Egy vektortér lineárisan független generátorrendszerét bázisnak nevezzük.

20. *Észrevétel.* Egy vektortérnek nem feltétlenül egy bázisa van, sőt általában végtelen sok van.