3. GYAKORLAT

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-elimináció.

1. Lineáris egyenletrendszerek

1. Definíció. Egy m egyenletből álló, n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1}$$

Az egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ formában is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

2. Definíció. Az (1) egyenletrendszer megoldásának nevezünk egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est, ha azt az (1)-be visszahelyettesítve minden egyenlőség teljesül.

3. Definíció. Egyenletrendszer elemi átalakításai [bővített mátrix elemi átalakításai]:

1. Két egyenletet [sort] felcserélünk.
2. Egy egyenletet [sort] megszorzunk egy tetszőleges nemnulla skalárral.
3. Valamelyik egyenlethez [sorhoz] hozzáadjuk egy másik egyenlet [sor] skalárszorosát.
4. Ha az egyik egyenletben minden együttható és a jobb oldali konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk. [A csupa nulla sort elhagyjuk.]

4. Definíció. Egy egyenletrendszer lépcsős alakú, ha a bővített mátrixának

1. nincs csupa nulla sora;
2. minden sorának első nemnulla eleme 1;
3. minden sorának első nemnulla eleme hátrább van, mint a fölötte álló sor első nemnulla eleme.

5. Tétel (Gauss-elimináció)**.** *Bármely nem azonosan nulla bővített mátrixú egyenletrendszer lépcsős alakra hozható elemi átalakításokkal, és ebből az egyenletrendszer megoldása könnyen kiolvasható.*

6. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}\right.!$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

(1) : 1. és 3. sor cseréje.
(2) : A 2. sorhoz hozzáadjuk az 1. sort.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét.
(4) : A 2. sort megszorozzuk (-1)-gyel.
(5) : A 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-7)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-6)-szorosát.
(6) : A 4. sorból levonjuk a 3. sort.
(7) : Elhagyjuk a 4. sort.
Megoldás visszafejtése:

1. $-11z = 18 \Longrightarrow z = -\frac{18}{11}$
2. $y + z = -3 \Longrightarrow y - \frac{18}{11} = -3 \Longrightarrow y = -3 + \frac{18}{11} = -\frac{15}{11}$
3. $x - 2y + z = 2 \Longrightarrow x - 2\left(-\frac{15}{11}\right) + \left(-\frac{18}{11}\right) = 2 \Longrightarrow x = 2 + \frac{18}{11} - \frac{30}{11} = \frac{10}{11}$

Megkaptuk az egyenletrendszer **egyetlen** megoldását.

7. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & = & 8 \\ 9x & + & 10y & + & 11z & = & 12 \\ 13x & + & 14y & + & 15z & = & 16 \end{array} !$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-5)-szörösét hozzáadom a 2. sorhoz. Az 1. sor (-9)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz. Az 1. sor (-13)-szorosát hozzáadom a 4. sorhoz.
(2) : A 2. sort elosztom (-4)-gyel. A 3. sort elosztom (-8)-cal. A 4. sort elosztom (-12)-vel.
(3) : A 3. sorból kivonom a 2. sort. A 4. sorból kivonom a 2. sort. Mivel csupa nulla sorokat kapunk, el is hagyjuk azokat.
Megoldás visszafejtése:

1. $y + 2z = 3 \Longrightarrow y = 3 - 2z$
2. $x + 2y + 3z = 4 \Longrightarrow x = 4 - 3z - 2y = 4 - 3z - 2(3 - 2z) = 4 - 3z - 6 + 4z = -2 + z$

Megkaptuk az egyenletrendszer **végtelen sok** megoldását, mivel a z ismeretlen szabad ismeretlen, azaz értéke tetszőlegesen megválasztható.

8. Definíció. Az (1) egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakjában a soronkénti első nem nulla elemek oszlopainak megfelelő változókat kötött változóknak nevezzük.

9. Definíció. Az (1) egyenletrendszer nem kötött változóit szabad változóknak nevezzük.

10. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 7x & + & 7y & + & 8z & = & 10 \end{array}\ !$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-4)-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz. Az 1. sor (-7)-szeresét hozzáadjuk a 3. sorhoz.
(2) : A második sort elosztom (-3)-mal.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadom a 2. sor 6-szorosát.
Megoldás visszafejtése:

1. $0 = 1 \Longrightarrow$Ellentmondás.

Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

11. Tétel. *Bármely lineáris egyenletrenszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása van.*

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha a bővített mátrixában van ellentmondó sor:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right), \ \textit{ahol } c \neq 0.$$

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha van szabad változója.*
- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjának ugyanannyi sora van, mint ahány ismeretlen, azaz nincs szabad változó.*