2. GYAKORLAT

Determináns.

1. (Rekurzív) definíció

FONTOS: Determinánsa csak négyzetes mátrixoknak van!!!

1. Definíció. Egyetlen számból álló mátrixok determinánsa az a SZÁM, amit a mátrix tartalmaz. Azaz, ha $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, akkor

$$\det(A) = |A| = a_{11}.$$

2. Definíció. Egy (2×2)-es mátrix determinánsának kiszámítására, maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \text{(főátló elemeinek szorzata)} - \text{(mellékátló elemeinek szorzata)} \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

3. Definíció (Rekurzió)**.** A pontos definícióhoz szükségünk van néhány kiegészítő definícióra.

4. Definíció. Ha egy mátrixból elhagyjuk az i. sorát és a j. oszlopát, akkor a megmaradt mátrix determinánsát a megfelelő sor-oszlop kombinációhoz tartozó aldeterminánsnak nevezzük, és M_{ij}-vel jelöljük.

5. Példa. Ha $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, akkor például

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32}.$$

6. Definíció. Az $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ determinánst a megfelelő sor-oszlop kombinációhoz tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük.

7. Példa. Az előző példa alapján $A_{21} = -(b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32}) = -b_{12}b_{33} + b_{13}b_{32}$.

3. Definíció folytatása. Most már visszatérhetünk a determináns definíciójához. Legyen B egy $(n \times n)$-es mátrix, ahol $n > 1$. Ekkor

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \overset{(def)}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(b_{1j} \cdot A_{1j}\right),$$

ahol A_{ij} a megfelelő adjungált aldetermináns.

8. Példa. Az 5. Példában látható mátrix determinánsa a következő:

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + b_{13}A_{13} \\ &= b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A kisebb determinánsok már egy előző definíció szerint számolhatók.

9. *Észrevétel.* Attól lesz a definíció rekurzív, hogy az $(n \times n)$-es determináns kiszámítását visszavezetjük (legfeljebb) n darab $((n-1) \times (n-1))$-es determináns kiszámítására.

10. *Észrevétel.* A fenti rekurziót a determináns első sora szerinti kifejtésének is nevezik.

2. Elemi átalakítások

Tétel. *Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.*

1. *A determináns tetszőleges sora szerint kifejthető.*
2. *A determináns megegyezik a transzponáltjával.*
3. *A determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.*
4. *Ha a determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.*
5. *A determináns értéke nulla, ha van két azonos sora.*
6. *Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a konstanssal megszorzunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.*
7. *A determináns nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.*
8. ***A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.***
9. *Dualitási elv: az* 1. − 8. *állításokban a „sor" szó kicserélhető az „oszlop" szóra.*

2.1. Tervszerű kinullázás

Ennek a módszernek a lényege az, hogy a fenti 8. állítás segítségével el tudjuk érni, hogy egy tetszőleges sorban/oszlopban csak egyetlen nemnulla elem szerepeljen.

Ezzel a módszerrel gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert megtudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát.

11. Példa. Nézzük meg a módszert egy példán.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\overset{(3)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (-7) \cdot (-29) - 6 \cdot 10 = 143.$$

- (1) : A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor (-1)-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 8. állítását.
- (2) : Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 8. állítását.
- (3) : Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint.
- (4) : Sarrus-szabállyal megkaptam a végső eredményt.

12. *Észrevétel.* Ez a módszer gondolkodásigényesebb, viszont számolástechnikailag gyorsabb, mint a rekurzív definíció. Gondoljuk végig, hogy mennyit kell számolnunk (4×4)-es, (5×5)-ös illetve még nagyobb determinánsok esetén a két módszerrel.

3. Alkalmazások

- Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata.
- Egyenes, kör egyenlete.
- Cramer-szabály.
- ...

4. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[{{3, 2, -4},{-2, -5, 1},{-8, 2, 1}}]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]]));`
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu