6. GYAKORLAT

Bázis, dimenzió. Koordináták.

Emlékeztető

1. Definíció. Legyen V egy vektortér, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a

$$[v_1, \ldots, v_n] = \{c_1v_1 + \ldots + c_nv_n : c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_iv_i : c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz alteret alkot V-ben, és ezt a halmazt a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer által generált altérnek nevezzük, és $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$-vel jelöljük.

2. Definíció. Legyen V egy vektortér, U egy altere V-nek, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pedig n darab vektor V-ből. Ekkor a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszert az U altér generátorrendszerének nevezzük, ha $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = U$.

3. *Észrevétel.* Természetesen az előbbi definícióban $U = V$ esetében beszélhetünk a vektortér generátorrendszeréről is.

4. Definíció. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \ldots, c_n$ valósz számok esetén,

$$\text{ha } c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = \underline{0}, \text{ akkor } c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

5. Definíció (Rang)**.** Egy $v_1, \ldots v_n$ vektorrendszer rangja a legnagyobb maximális lineárisan független részrendszerének elemszámát, vagyis a rang az r egész szám, ha

1. kiválasztható $v_1, \ldots v_n$ közül r darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrrendszert alkossanak, de
2. nem választható ki $v_1, \ldots v_n$ közül $r + 1$ darab vektor úgy, hogy ezek lineárisan független vektorrrendszert alkossanak.

6. Definíció. Egy vektortér lineárisan független generátorrendszerét bázisnak nevezzük.

1. Dimenzió

7. Definíció. Egy vektortér véges dimenziós, ha van véges generátorrendszere.

8. Tétel. *Egy véges dimenziós vektortér bármely két bázisának elemszáma egyenlő.*

9. Definíció. Az előző tételbeli közös elemszám a vektortér dimenziója. Egy V vektortér dimenzióját $\dim V$-vel jelöljük.

Emlékeztető

10. Definíció. A V vektortér egy nemüres U részhalmazát altérnek nevezzük, ha U is vektortér, azaz U zárt a V-től örökölt összeadásra és szorzásra nézve.

11. *Észrevétel.* A V vektortér egy U altere is vektortér, tehát U-nak is van $\dim U$ dimenziója.

12. Tétel.

- *A $[v_1, \ldots, v_n]$ altér dimenziója egyenlő a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangjával.*
- *A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer maximálisan független vektorrendszerei bázisa a $[v_1, \ldots, v_n]$ altérnek.*
- *Ha a vektorrendszer dimenziója n, akkor bármely n elemű lineárisan független vektorrendszere bázis.*

13. Tétel. *Ha U_1 és U_2 olyan alterei a V vektortérnek, melyekre $U_1 \subseteq U_2$, akkor $\dim U_1 \leq \dim U_2$, és $\dim U_1 = \dim U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $U_1 = U_2$.*

14. Tétel (Dimenziótétel)**.** *Ha U_1 és U_2 két altér a V vektortérben, akkor $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim (U_1 \cap U_2)$.*

15. Tétel. *Ha $U_1 = [v_1, \ldots, v_n]$ és $U_2 = [w_1, \ldots, w_k]$, akkor $U_1 + U_2 = [v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k]$.*

16. Példa. Adott az U_1 és U_2 altér a V vektortérben. A kérdés az, hogy a két altér egyenlő-e?

Egy konkrét feladat megoldása helyett, inkább egy egyszerűbb példán keresztül magyaráznám el, hogy mi az amit ki kell számolni. Legyen például a V a jól ismert $\mathbb{R}^3$, azaz a tér. Ebben nyilván alteret alkotnak az origón átmenő síkok, egyenesek, és maga az origó illetve a tér is. Ezek rendre 2, 1, 0 és 3 dimenziós alterek. Az nyilvánvaló, hogy két altér csak akkor egyezhet meg, ha azonos a dimenziójuk, ez könnyen látható abból, hogy például egy egyenes nem lehet egyenlő egy síkkal. Tehát az $U_1 = U_2$ szükséges feltétele a $\dim U_1 = \dim U_2$. Ez viszont még kevés. Miért is? Nyilván attól, hogy van a térben két sík, még nem biztos, hogy egyenlőek. Maradjunk a síkoknál, mint alterek, a vektortér is legyen az $\mathbb{R}^3$ tér. Ekkor két sík helyzete egymáshoz viszonyítva a következők lehetnek: vagy metszik egymást (a metszet ilyenkor egy egyenes), vagy pedig egybeesnek. Az nem lehet, hogy két sík ne metsze egymást, mint altér, mert mindkettőnek tartalmaznia kell a nullvektort, azaz az origót. Az első esetben a két altér metszete egy egyenes, ami egy 1-dimeziós alakzat, tehát $\dim (U_1 \cap U_2) = 1$. Ha a két sík egybeesik, akkor megyeznek, és a dimenziójuk így szintén 2 kell, hogy legyen, azaz ebben az esetben $\dim (U_1 \cap U_2) = 2$. Ezekből már levonható az a következtetés, hogy két altér akkor, és csak akkor egyezik meg, ha a dimenziójuk ugyanannyi, és ez még egyenlő a metszetük dimenziójával is. Viszont a gyakorlaton mégis az alterek összegének számoltuk ki a dimenzióját, és azt állítottam, hogy a metszet dimenziója helyett az összeg dimneziójával kell az alterek dimenziójának megegyeznie. Egyszerűen nézzünk rá a dimenziótételre és megláthatjuk, hogy ha a négy dimenzióból három megegyezik, akkor negyedik is ugyanannyi lesz. Így ha az alterek generátorrendszerükkel vannak megadva, akkor az összegük dimenziója könnyebben számolható, mint a metszet dimenziója, azért csináltuk úgy, ahogy.

2. Koordináták

17. Definíció. Legyen V egy n-dimenziós vektortér, és B legyen ennek egy rögzített $e_1, \ldots, e_n$ bázisa. Ekkor a V vektortér bármely v vektora EGYÉRTELMŰEN előáll a B bázisbeli vektorok lineáris kombinációjaként: $v = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$. A $c_1, \ldots, c_n$ számokat a v vektor B bázisbeli koordinátáinak, a $(c_1, \ldots, c_n)$ vektort pedig a B bázisbeli koordinátasorának nevezzük.

3. Összefoglalás

18. Tétel (A Tétel)**.** *Legyen adott egy k elemű $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor*

- *$v_1, \ldots, v_k$ rangja legfeljebb k;*
- *$v_1, \ldots, v_k$ pontosan akkor lineárisan független, ha a rangja k;*
- *$v_1, \ldots, v_k$ pontosan akkor lineárisan függő, ha a rangja kisebb, mint k;*
- *ha $k < n$, akkor $v_1, \ldots, v_k$ nem generátorrendszer;*
- *$v_1, \ldots, v_k$ pontosan akkor generátorrendszer, ha a rangja n;*
- *$v_1, \ldots, v_k$ pontosan akkor bázis, ha $k = n$, és a rangja n.*

19. Példa. Mit tudunk mondani az $(1,2,3,0), (2,0,1,1), (-3,2,1,-2)$ vektorrendszerről?

Számoljuk ki a vektorrendszer rangját, és alkalmazzuk az előző tételt!

$$\left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 10 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Két sor maradt, így a vektorrendszer rangja 2. Mivel a rang kisebb mint a vektorok száma, így a vektorrendszer lineárisan függő. Ahhoz, hogy generátorrendszer legyen, a rangnak 4-nek kellene lennie, tehát nem generátorrendszer. Ebből már következik, hogy nem is bázis.

20. Példa. Mit tudunk mondani az $(1,2,-1)\,,(2,5,1)\,,(4,-1,6)$ vektorrendszerről?

Számoljuk ki a vektorrendszer rangját, és alkalmazzuk az előző tételt!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}$$

Három sor maradt, így a vektorrendszer rangja 3. Mivel a rang egyenlő a vektorok számával, így a vektorrendszer lineárisan független. Ahhoz, hogy generátorrendszer legyen, a rangnak 3-nak kellene lennie, mivel az $\mathbb{R}^3$-ben dolgozunk, tehát a vektorrendszer generátorrendszer. Ezen információk szerint a tétel utolsó pontja azt állítja, hogy a vektorrendszer bázis.

21. Példa. Az előzőpéldában szereplő vektorrendszerről kiderült, hogy bázis. Írjuk fel ebben a bázisban az $(1,2,0)$ vektor koordinátáit!

A $c_1\,(1,2,-1) + c_2\,(2,5,1) + c_3\,(4,-1,6) = (1,2,0)$ egyenletrendszert kell megoldani, Gauss-eliminációval megkaphatjuk a lehetséges (c_1,c_2,c_3) értékeket. (Mivel a vektorrendszer bázis, így pontosan egy megoldást fogunk kapni.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 1 \end{array}\right)$$

Ebből visszafejtve a megoldást, azt kapjuk, hogy $(c_1,c_2,c_3) = \left(\frac{15}{37}, \frac{9}{37}, \frac{1}{37}\right)$. Ezzel a feladat kész.