Leontief-féle input-output modell

A modell lényegében arról szól, hogy a vizsgálandó gazdaság jól elkülöníthető szektorokra van osztva és egyszerűen begyűjthető információk alapján tudunk következtetni a gazdaság termelésére, illetve annak változására. A vizsgált gazdaság lehet állami szintű, de lehet vállalati szintű is; a lényeg, hogy a különböző szektorokat (jól meghatározottan) el tudjuk különíteni, illetve természetesen más feltételeket is meg kell szabnunk a modell teljesüléséhez:

1. A gazdásagban a szektorok száma n, azaz a szektorok száma a vizsgált időszakon belül nem változik. (A lehető legkevesebb szektorra érdemes osztani a gazdaságot, mert a száműthatósági bonyolultsága jelentősen növekszik a szektorok számának növelésével.)

2. Minden szektor csak egy terméket állít elő, és minden terméket csak egy szektor állít elő. (Nincs ikertermék, nincs ikertermelés.) Ez úgy is fogalmazható, hogy a termékek és a termelési folyamatok között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat van.

3. Az elemzés rövid távú.

4. Az inputokat nem lehet egymással helyettesíteni.

Ezen feltételek esetén már elkezdhetjük vizsgálni ezzel a modellel a termelés alakulását az adott gazdaságban, de még mielőtt ezt elkezdenénk, ismerkedjünk meg néhány új fogalommal. Az egyik legfontosabb az ágazati-kapcsolat mátrix, vagy más néven folyó ráfordítási mátrix. A ráfordítási mátrix a ráfordítási együtthatókat tartalmazza, melyek azt mutatják meg, hogy egységnyi kibocsátás megtermeléséhez, az adott inputtényezőből mennyi szükséges. Nézzünk erre a fogalomra egy példát.

1. Példa. Tegyük fel, hogy a gazdaságban három ágazat működik: mezőgazdaság, ipar és szolgáltatás. (Nem valami realisztikus feltevés, de könnyen gondolhatunk rá úgy, hogy több szektor is van, csak azokkal mi nem foglalkozunk.) Ekkor egyszerű adatokból felírható az alábbi táblázat.

	Mezőgazdaság	Ipar	Szolgáltatás
Mezőgazdaság	35	5	6
Ipar	5	62	23
Szolgáltatás	10	26	42

Tudjuk, hogy a mezőgazdaság a vizsgált időszakban 85 (milliárd dollár értékű) egységet termelt összesen, az ipar 163-at, a szolgáltatás 219-et. Ezeket a számokat a szektor teljes kibocsátásának nevezik. A táblázatot oszloponként kell olvasni, a következő módon: például a mezőgazdaság által előállított 85 (milliárd dollárnyi) egységből 35-öt mezőgazdasági termékre, 5-öt ipari termékre és 6-ot szolgáltatási termékre költött. Nyilván 85 több, mint $35 + 5 + 6$, de ez azért van, mert egy csomó másik szektort itt nem veszünk figyelembe. (Valós adatokat nézve egy teljes gazdaságot elemezve, ha minden szektort figyelembe vennénk, akkor egyenlőnek kellene lennie, beleszámítva a végső felhasználást is, azaz azt a mezőgazdasági terméket, ami semmilyen módon nem forog vissza a gazdaságba.) Nem feltétlen fontos átváltani mindent egyetlen métékegységre, lehet minden termék különböző mértékegységű is. Ahhoz, hogy megkapjuk a ráfordítási mátrixot, az oszlopokban az elemeket le kell osztani a megfelelő teljes kibocsátással, hogy egységnyire jutó adatokat kapjunk. Ekkor a következő táblázatot kapjuk.

	Mezőgazdaság	Ipar	Szolgáltatás
Mezőgazdaság	$0,41$	$0,03$	$0,03$
Ipar	$0,06$	$0,38$	$0,11$
Szolgáltatás	$0,12$	$0,16$	$0,19$

Ebben a táblázatban az első oszlop azt jelenti, hogy 1 egységnyi mezőgazdasági termék előállításához $0,41$ egység mezőgazdasági terméket, $0,06$ ipari terméket és $0,12$ szolgáltatási terméket kell előállítani. Tehát megkaptuk az ágazati kapcsolatok mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} 0,41 & 0,03 & 0,03 \\ 0,06 & 0,38 & 0,11 \\ 0,12 & 0,16 & 0,19 \end{pmatrix}.$$

Térjünk vissza modell gazdasági vizsgálatához. Milyen kérdéseket tehetünk fel egyáltalán, hogy ezzel a modellel választ is kapjunk rájuk? Az egyik ilyen kérdés lehet, hogy mennyit kell termelnünk ahhoz, hogy egy adott nettó termelést elérjünk? Vizsgáljuk először ezt a feladatot! Tegyük fel, hogy az adott elérni kívánt nettó kibocsátási vektor d és az x a teljes kibocsátás vektora, ami jelen esetben ismeretlen. Az x vektor meghatározására nagyon szép matematikai bizonyítás adható végtelen sorok összegzésével, viszont az alábbi egyszerű meggondolás is ugyanahhoz az eredményhez vezet. Ha x az összes kibocsátás vektora, akkor ennek legyártása során Ax inputra van szükségünk az egyes ágazatokból. Ez egyszerűen adódik a ráfordítási mátrix és a mátrixszorzás definíciójából. Viszont nekünk az kell, hogy nettóban maradjon plusz d, tehát a következő mátrixegyenlethez jutunk:

$$Ax + d = x.$$

Tudjuk, hogy a megfelelő méretű egységmátrixxal bármelyik vektor szabadon megszorozható, mert ekkor az értéke nem fog változni. Átírva a fenti egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Ax + d &= Ex, \\ d &= Ex - Ax, \\ d &= (E - A)x, \\ (E - A)^{-1}d &= x. \end{aligned}$$

Ez már egy explicit forma, és könnyen meg tudjuk határozni az x ismeretlenvektort. Ezt az $(E - A)^{-1}$ inverzmátrixot nevezik Leontief-féle inverznek.

2. Példa. Használjuk az 1. példa adatait! Tegyük fel, hogy a fogyasztási szektornak (ami nem termel, csak fogyaszt) a következő termékmennyiségre van szüksége az adott szektorokból:

$$d = \begin{pmatrix} 39 \\ 60 \\ 131 \end{pmatrix}.$$

Tehát a fogyasztói szektor ellátásához 39 (milliárd dollárnyi) mezőgazdasági termék, 60 ipari termék és 131 szolgáltatási termék szükséges. Mennyit termeljenek a szektorok összesen?

A válasz nyilván nem annyi, hogy az össztermelés legyen d, mert például, ha a mezőgazdaság 39-et termel, akkor annak rögtön $0,41$-szerese vissza is forog a mezőgazdaságba, tehát biztos nem tudjuk elérni a nettó 39-es kibocsátást. A fentiekben levezetett Leontief-inverzet kell használnunk, ugyanis a válasz a kérdésre pontosan az ottani x vektor. Tehát meg kell határozni az $(E-A)^{-1}d$ vektort, ami megtehető, mert minden tagja ismert.

$$A = \begin{pmatrix} 0,41 & 0,03 & 0,03 \\ 0,06 & 0,38 & 0,11 \\ 0,12 & 0,16 & 0,19 \end{pmatrix} \Longrightarrow E - A = \begin{pmatrix} 0,59 & -0,03 & -0,03 \\ -0,06 & 0,62 & -0,11 \\ -0,12 & -0,16 & 0,81 \end{pmatrix}$$

Kiszámítjuk ennek az inverzét (a kézi számolás eléggé nehézkes lehet, ezért egyszerűbb számítógéppel dolgozni)!

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,7212 & 0,1034 & 0,0778 \\ 0,2195 & 1,6847 & 0,2369 \\ 0,2984 & 0,3481 & 1,2929 \end{pmatrix}$$

Ebből már az x vektort egy egyszerű mátrixszorzással megkapjuk:

$$x = (E-A)^{-1}d = \begin{pmatrix} 1,7212 & 0,1034 & 0,0778 \\ 0,2195 & 1,6847 & 0,2369 \\ 0,2984 & 0,3481 & 1,2929 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 60 \\ 131 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83,5203 \\ 140,6759 \\ 201,8896 \end{pmatrix}.$$

Újra következzen egy kis elmélet. Ha jól megnézzük, akkor a Leontief-inverz csak az A ráfordítási mátrixtól függ, ami viszont a gazdaság egy megfigyelt és megadott jellemzője. Így sejthető, hogy már a Leontief-inverzből is értékes információkat tudunk kinyerni. Ha a Leontief-inverz valamelyik eleme nulla, akkor azt mondható, hogy a megfelelő ágazat teljesen független a másik ágazattól. Mi történik akkor, ha a Leontief-inverznek létezik negatív eleme? Ez esetben a gazdaság nem jól működik, ugyanis többe kerül a működés, mint a termelés. Ebben az esetben meg kell nézni, hogy ezt ki lehet-e javítani, és ha elfogadható költségek mellett igen, akkor célszerű is kijavítani.

Kimondható egy olyan tétel is, hogy a gazdaság akkor és csak akkor produktív, ha létezik a Leontief-inverz (mert az is elképzelhető, hogy nem is létezik) és ezen kívül a Leontief-inverz minden eleme nemnegatív (a főátló szigorúan pozitív). A produktivitás egy nagyon fontos közgazdaságtani fogalom, a Gale-féle produktivitási kritérium szerint, egy A ráfordítási mátrix (és az azt meghatározó gazdaság) produktív, ha létezik olyan $y \geq 0$ termelési vektor, amelyre teljesül, hogy $y > Ay$, azaz létezik olyan bruttó kibocsátási vektor, ami meghaladja a hozzá közvetlenül szükséges ráfordítások mértékét. (Ahhoz, hogy hasznot terneljünk, termelnünk kell valamennyi kis többletet, amit nem használunk fel mi a termelés során.)

A modell egy másik alkalmazása lehet a zárt gazdaság vizsgálata. Itt arról van szó, hogy nincs szükség külön nettó termelésre, hanem amit termelünk azt fel is használjuk a következő ciklusban a termelésre (pont annyit, se többet, se kevesebbet). Ebben az esetben a fenti modellünkből hiányzik a d vektor és csak az $Ax = x$ egyenletet kell megoldanunk. Interpretálhatjuk úgy is a problémát, hogy nem termelünk exportra, így nincs szükség olyan termék előállítására, amit nem fogyasztunk el a termelés során. A probléma megoldása azt jelenti, hogy adjunk meg egy olyan termelést, amivel a gazdaság önellátó lehet. Megmutatható, hogy egy ilyen termelés csak akkor adható meg, ha a Leontief-inverz létezik és minden eleme nemnegatív. (Ki lehet térni arra a kérdésre is, hogy a valóságban ilyen megtehető lenne-e? Ha esetleg találunk olyan termelési vektort, amivel a gazdaság önellátó, még akkor is ott van a probléma, hogy a kezdeti termékeket honnan kapja meg a termelési folyamat, mivel a gazdaság zárt, így nincs import és még a gazdaság sem kezdett el termelni, hogy valami tartalékkal új termelési ciklusba kezdjen.)

Ajánlott irodalom:

- Zalai Ernő: Matematikai közgazdaságtan