

## 7. Feladatsor - mátrix inverze, Leontief-mátrixok

### Alap feladatok

**1. Feladat.** Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét (amennyiben létezik).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Feladat.** A következő mátrix egy három ágazatra bontott gazdaság Leontief-mátrixa. Döntsük el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsuk meg, hogy összesen mennyi terméket kell előállítani a  $(2, 1, 3)$  vektorral megadott nettó kibocsátáshoz.

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

### Nehezebb feladatok

**3. Feladat.** Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4. Feladat.** Határozzuk meg, hogy milyen  $x$  valós számok esetén invertálható az alábbi mátrix, valamint adjuk is meg az inverzét (természetesen  $x$  függvényében).

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**5. Feladat.** Legyen  $A$   $n \times n$ -es invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy az  $A$  inverzének kiszámítása során fellépő generáló elemek szorzatának abszolútértéke megegyezik  $A$  determinánsának abszolútértékével.

**6. Feladat.** Egy gazdaság Leontief-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy az egyes ágazatokban előállított termékek ára: 10, 15, illetve 5 Ft. Mely ágazatok nyereségesek, illetve veszteségesek? Próbáljunk meghatározni

olyan árakat, amelyek mellett a gazdaságban nem lesz veszteséges ágazat. Milyen árak mellett lesz a gazdaság össz-nyeresége maximális (feltéve, hogy minden ágazat ugyanakkora outputtal rendelkezik)?

**7. Feladat.** Az  $x$  paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi mátrix egy működőképes gazdaság Leontief-mátrixa?

$$\begin{pmatrix} 0.2 & x \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

**8. Feladat.** Az  $x$  paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi mátrix egy működőképes gazdaság Leontief-mátrixa?

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & x \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

**9. Feladat.** Egy működésképtelen gazdaság Leontief-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$$

A gazdaságot modernizálni próbáljuk: a mátrix bármely elemének 1-gyel történő módosításának a költsége 1 milliárd Ft. Hogyan lehet a legolcsóbban elérni, hogy a gazdaság már éppen működőképes legyen?