6. Feladatsor

Alap feladatok

1. Feladat. Hajtsuk végre az alábbi elemi bázistranszformációkat (a generáló elem legyen a $*$-gal jelölt).

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 1^* & 2 & -1 \\ e_2 & 2 & -1 & 2 \\ e_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & -2 & 1 \\ e_2 & 0 & -2 & 3 \\ e_3 & 1 & 2^* & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & 1 & 2 \\ e_2 & -2^* & 1 & 2 \\ e_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline e_1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ e_2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ e_3 & 2 & -2 & 3^* & 2 \end{array}.$$

2. Feladat. Elemi bázistranszformáció segítségével adjunk meg maximális lineárisan független részrendszert az alábbi vektorrendszerekben.

(1) $(1,1,0),(-1,2,1),(0,3,1),(2,-1,-1)$,
(2) $(1,1,-1,0),(1,2,1,1),(2,3,0,1),(0,1,2,1),(3,4,-1,1)$,
(3) $(1,1,-1,1),(-1,0,1,2),(1,1,1,1),(-1,1,1,1)$.

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Feladat. Oldjuk meg a 3. feladatsor első 7 feladatát elemi bázistranszformáció segítségével.

5. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1+x_2-2x_3 &= 0 \\ x_1-x_2-x_3 &= 0 \\ 2x_1-3x_3 &= 0 \end{aligned},$$

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1-x_2-x_4 &= 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 &= 0 \end{aligned},$$

$$(3)\quad \begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-2x_4+x_5 &= 0 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5 &= 0 \\ 2x_1-3x_2+4x_4-x_5 &= 0 \end{aligned}.$$

Nehezebb feladatok

6. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & - & 14x_3 & = & a \end{array}$$

7. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 8x_3 & + & ax_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \end{array}$$

8. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

9. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldásterében.

$$\begin{array}{lcl} x_2 + x_3 - ax_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - ax_3 - 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

10. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az a paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2-a \\ -1 & -2 & a & -1 \end{pmatrix}$$

11. Feladat. Hány maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsa van az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$