6. Gyakorlat - Bázis, dimenzió

Elemi gyakorló feladatok

1. Feladat. Döntsük el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázis-e.

a) $V = \mathbf{R}^3$, $(1,-1,2),(1,1,1),(0,1,2),(1,-2,1)$,
b) $V = \mathbf{R}^3$, $(1,-1,0),(1,1,1),(1,-3,-1)$,
c) $V = \mathbf{R}^3$, $(1,2,-1),(-1,1,1),(1,2,0)$.
d) $V = \mathbf{R}^4$, $(1,-1,1,1),(0,1,2,1),(1,1,1,0),(-1,2,1,1)$.

2. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátáit a megadott bázisban.

a) $v = (1,-1,1)$, bázis: $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$,
b) $v = (1,-1,1)$, bázis: $(1,-1,2),(0,0,1),(1,2,3)$,
c) $v = (1,2,1)$, bázis: $(-1,2,1),(1,2,3),(-1,1,1)$,
d) $v = (1,2,1,2)$, bázis: $(-1,1,1,0),(1,2,1,-1),(1,1,1,1),(-1,-1,-2,-2)$.

3. Feladat. Legyen $U_1 = [(1,-1,1,2),(-1,2,1,2),(1,0,1,0),(1,1,3,4)]$ és $U_2 = [(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$. Hány dimenziós az U_1, illetve az U_2 altér? Megegyezik-e az U_1 altér az U_2 altérrel?

4. Feladat. Legyen V 10 dimenziós vektortér, U_1 8 dimenziós, U_2 9 dimenziós altér V-ben. Hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?

Szorgalmi feladatok

5. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbf{R}^4$ vektortérnek:

a) $(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(-1,x,2,1)$,
b) $(1,0,1,2),(-1,2,1,2),(1,0,1,0),(1,2,4,x)$,
c) $(-1,1,0,1),(x,1,2,1),(1,x,-1,2),(1,0,1,0)$.

6. Feladat. Legyenek a v vektor koordinátái a $v_1,\dots,v_n$ bázisban: $(1\ \alpha_2\ \dots\alpha_n)$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

7. Feladat. Legyen $v_1,\dots,v_n$ bázisa egy V vektortérnek. Adjunk meg olyan v vektort, melyre a $v_1+v,\dots,v_n+v$ vektorrendszer nem bázis. Milyen v vektorok esetén lesz a $v_1+v,\dots,v_n+v$ vektorrendszer bázis?

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a valós együtthatójú polinomok vektortere nem véges dimenziós, vagyis nem adható meg benne véges sok vektorból álló generátorrendszer.

9. Feladat. Véges dimenziós-e az $(\mathbf{R}^+,\oplus,\odot)$ vektortér, ahol

$$u \oplus v = uv,\ \alpha \odot v = v^\alpha?$$