5. feladatsor

Lineáris függetlenség, bázis, koordinátasor
Elemi feladatok:

1. Feladat. Lineárisan függő, avagy független az alábbi vektorrendszer?

(1) $(1,0,1),(1,1,1),(1,0,1)$,
(2) $(1,2,1),(1,-1,1),(1,1,0)$,
(3) $(1,1,2),(1,-1,-1),(0,2,3)$.

2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját.

(1) $(1,0,1,1),(-1,1,0,1),(0,0,0,0),(0,1,1,2)$,
(2) $(1,2,1,0),(1,1,1,1),(1,-2,1,0)$,
(3) $(1,1,0,0),(-1,1,-1,1),(1,1,2,3)$.

3. Feladat. Döntsük el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázis-e.

(1) $V=\mathbf{R}^3$, $(1,-1,2),(1,1,1),(0,1,2),(1,-2,1)$,
(2) $V=\mathbf{R}^3$, $(1,-1,0),(1,1,1),(1,-3,-1)$,
(3) $V=\mathbf{R}^3$, $(1,2,-1),(-1,1,1),(1,2,0)$.
(4) $V=\mathbf{R}^4$, $(1,-1,1,1),(0,1,2,1),(1,1,1,0),(-1,2,1,1)$.

4. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátáit a megadott bázisban.

(1) $v=(1,-1,1)$, bázis: $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$,
(2) $v=(1,-1,1)$, bázis: $(1,-1,2),(0,0,1),(1,2,3)$,
(3) $v=(1,2,1)$, bázis: $(-1,2,1),(1,2,3),(-1,1,1)$,
(4) $v=(1,2,1,2)$, bázis: $(-1,1,1,0),(1,2,1,-1),(1,1,1,1),(-1,-1,-2,-2)$.

Nehezebb feladatok

5. Feladat. Mit tudunk mondani a következő vektorrendszerről lineáris függetlenség szempontjából az x paraméter függvényében?

$$(1,-1,2,1),(-1,0,1,1),(x,-1,3,2)$$

6. Feladat. És erről?

$$(1,-1,2,1),(2,-1,x+3,x),(1,0,x+1,2x-2)$$

7. Feladat. Tegyük fel, hogy egy valós vektortérben a $v_1,\dots,v_m$ vektoroknak csak véges sok lineáris kombinációja állítja elő a nullvektort. Következik-e ebből, hogy a vektorrendszer lineárisan független?

8. Feladat. Tegyük fel, hogy v_1,v_2,v_3 egyike sem a nullvektor. Mit állíthatunk v_1 és v_3 viszonyáról lineáris függőség, illetve függetlenség szempontjából, ha

a) v_1,v_2 lineáris függő, v_2,v_3 lineárisan függő,
b) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan függő,
c) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan független?

9. Feladat. Határozzuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy a következő vektorrendszer rangja a legkisebb legyen.

$$(3, 2, 6), (-1, 2, 1), (2, x, 7)$$

10. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszer rangját az x paraméter függvényében.

$$(1, -1, 2, 1), (1, 0, 3, 0), (2, -1, x+4, x^2-3x+3), (-1, 4, x, x-6)$$

11. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbf{R}^4$ vektortérnek:

$$(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, x, 2, 1)$$

12. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbf{R}^4$ vektortérnek:

$$(-1, 1, 0, 1), (x, 1, 2, 1), (1, x, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$$

13. Feladat. Legyenek a v vektor koordinátái a $v_1, \ldots, v_n$ bázisban: $(1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_n)$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

14. Feladat. Legyen $v_1, \ldots, v_n$ bázisa egy V vektortérnek. Adjunk meg olyan v vektort, melyre a $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ vektorrendszer nem bázis. Milyen v vektorok esetén lesz a $v_1 + v, \ldots, v_n + v$ vektorrendszer bázis?

15. Feladat. Igazoljuk, hogy a valós együtthatójú polinomok vektortere nem véges dimenziós, vagyis nem adható meg benne véges sok vektorból álló generátorrendszer.