4. feladatsor

Vektortér, altér, generálás

Ajánlott elemi feladatok:

- Megyesi László: II. 1,2,3,6,7

Saját elemi feladatok:

1. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi halmaz a megadott összeadásra és skalárral való szorzásra nézve valós vektorteret alkot-e.

- $\mathbf{R}^n$, ahol az összeadás és a skalárral való szorzás komponensenként történik,
- az összes, $\mathbf{Z}$-n értelmezett valós függvények a szokásos összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve,
- $\mathbf{Z}^3$,
- $\mathbf{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \alpha(a,b)=(\alpha a,b)$,
- $\mathbf{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \alpha(a,b)=(\alpha a,0)$,
- $\mathbf{R}^2$, ahol $(a,b)+(c,d)=(b+d,a+b), \alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$.

2. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbf{R}^3$ vektortérben.

(1) $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+2x_2-x_3=0, x_1-x_2+3x_3=0\}$,
(2) $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1-x_2+x_3=1, x_1+x_2+x_3=0\}$,
(3) $U=\{(x_1,x_2,x_3) : 2x_1x_2+x_3=0\}$,
(4) $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1=0, \text{ vagy } x_2=0\}$,
(5) $U=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1=0, \text{ és } x_2=0\}$.

3. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az U altérnek.

(1) $v=(1,-1,1), U=[(1,-1,0),(0,0,1)]$,
(2) $v=(1,1,1), U=[(1,-1,2),(1,0,1)]$,
(3) $v=(1,2,1), U=[(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)]$,
(4) $v=(1,2,1), U=[(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)]$.

Nehezebb feladatok

4. Feladat. Legyen V az egész számok halmaza a szokásos összeadással, valamint $T=\mathbf{Q}$. A skalárral való szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$\lambda \odot v = \lfloor \lambda v \rfloor ,$$

ahol $\lfloor\ \ \rfloor$ a szám alsó egészrészét jelöli. Vektorteret kapunk-e így?

5. Feladat. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $v \neq \underline{0}$ és $\lambda v=\nu v$, akkor $\lambda=\nu$.
b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda u=\lambda v$, akkor $u=v$.
c) Ha $u \neq \underline{0}, v \neq \underline{0}, \lambda \neq 0, \nu \neq 0$ és $\lambda u=\nu v$, akkor $\lambda=\nu$ és $u=v$.

6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.

7. Feladat. Legyen W altér a valós számtest feletti V vektortérben, $u, v, w \in V$, és tegyük fel, hogy

$$u + v \in W, \quad v + 2w \notin W, \quad w + 3u \in W.$$

Mit állíthatunk az $5u + 3v + w$, illetve $6u + 3v + w$ vektorok és W kapcsolatáról?

8. Feladat. Legyen $U = [(1, 2, 1), (-1, 1, 1)], V = [(0, 3, 2), (-2, -1, 0)]$ két altere az $\mathbf{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

9. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}, V = [(1, 2, 1)]$. Igaz-e, hogy $U = V$?

10. Feladat. Döntsük el, hogy az x paraméter mely értékei esetén lesz eleme az $(1, x + 2, -2)$ vektor az

$$[(1, 2, -x), (1, 1, 0), (-1, -3, x + 1)]$$

altérnek.

11. Feladat. Döntsük el, hogy az x paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $(2, -1, 1)$ vektor az

$$[(1, -1, 1), (1, 0, 1 - x), (-1, x + 1, -2)]$$

altérnek.

12. Feladat. Az x paraméter függvényében vizsgáljuk meg, hogy a következő vektorrendszer generátorrendszere-e az $\mathbf{R}^3$ vektortérnek.

$$(1, -1, x), (x, 0, 1), (1, 1, -2)$$