

1. Gyakorlat - mátrixműveletek

Ajánlott elemi gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V.1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V.7, 10.

Elemi gyakorló feladatok

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB, BA, CB, BC, DC, CD, EB^T, BF, E^T A, F^2, D^T C^T, (A+B)C, (A+B^T)D, AD + B^T D$$

2. Feladat. Szorozzuk össze az alábbi két mátrixot blokkosan.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. Feladat. Az alábbi blokkos felbontások közül mely esetben végezhető el a blokkos szorzás?

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Nehezebb feladatok

4. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P , illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1 -es mátrix, mely A i . sorának j . elemét tartalmazza.

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$$

7. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük a főátlójában lévő elemek összegét. Jele: $\text{tr } A$. Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\text{tr } AB = \text{tr } BA$.

8. Feladat. Egy $n \times n$ -es A mátrix főátlójában, és a főátló alatt minden elem 0. Bizonyítsuk be, hogy $A^n = 0$.

9. Feladat. Melyek azok az $n \times n$ -es mátrixok, melyek minden $n \times n$ -es mátrixszal felcserélhetők?

10. Feladat. Legyen A valós elemű mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix főátlójában az elemek összege 0. Határozzuk meg A -t.

11. Feladat. Próbáljuk megfogalmazni, mi a feltétele annak, hogy egy mátrixszorzat két tényezőjét blokkokra bontva, a szorzás blokkokra bontva elvégezhető legyen.

12. Feladat. Igaz-e, hogy ha A, B $n \times n$ -es mátrixok, akkor

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2?$$