Bázistranszformáció és alkalmazásai

Lineáris algebra gyakorlat

Összeállította:
Bogya Norbert

Tartalomjegyzék

Elemi bázistranszformáció

Definíció

Elemi bázistranszformációnak nevezzük azt a műveletet, melynek során egy bázis egy vektorát kicseréljük egy másik vektorra. Ekkor azt is mondjuk, hogy új vektort viszünk be a bázisba.

Tétel

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ egy bázisa a V vektortérnek. Ekkor a $v \in V$ vektor pontosan akkor cserélhető ki az e_i vektorral a bázisban, ha a v-nek a e_i-hez tartozó koordinátája nem nulla.

Tartalom

Elemi bázistranszformáció

Gyakorlati végrehajtás

Készítünk egy táblázatot az alábbiak szerint.

1. A táblázat bal szélső oszlopa az $e_1, \ldots, e_n$ bázisneveket tartalmazza.
2. A táblázat legfelső oszlopába írjuk a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok neveit.
3. A táblázat középső részébe a v_i vektorokat írjuk be a megfelelő oszlopba, így reprezentálva, hogy mi az egyes bázisvektorokhoz tartozó koordinátái.

	v_1	$\ldots$	v_j	$\ldots$	v_k
e_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_i	a_{i1}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\ldots$	a_{nj}	$\ldots$	a_{nk}

A v_j vektor pontosan akkor cserélhető ki az e_i bázisvektorral, ha $a_{ij} \neq 0$.

Elemi bázistranszformáció
Gyakorlati végrehajtás

Az elemi bázistranszformáció lépései a következők:

1. Választunk egy nemnulla generálóelemet a táblázatból. (Csak olyat választhatunk, amely e-s sorban és v-s oszlopban van.)
2. Felcseréljük a generálóelem sorát és oszlopát jelző e és v jelet.
3. A generálóelem helyére a reciprokát írjuk.
4. A generálóelem sorának többi elemét leosztom a generálóelemmel.
5. A generálóelem oszlopának többi elemét leosztom a generálóelemmel és megszorzom (-1)-gyel.
6. A többi elemet téglalapszabállyal számítjuk ki.
7. A fenti lépéseket addig ismételjük, amíg csak tudunk generálóelemet választani.

Elemi bázistranszformáció

Gyakorlati végrehajtás

Téglalapszabály

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	.	s_1	.	k
e_2	.	.	.	.
e_3	.	g	.	s_2

Itt a g a generálóelem, k-t pedig téglalapszabállyal kell kiszámolni. Ekkor az új táblázatban a k helyére a

$$\frac{kg - s_1 s_2}{g}$$

elem kerül.

Elemi bázistranszformáció
Gyakorlati végrehajtás

	v_1	$\dots$	v_j	$\dots$	v_k
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_i	a_{i1}	$\dots$	$\boxed{a_{ij}}$	$\dots$	a_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nk}

$\searrow$

	v_1	$\dots$	v_j	$\dots$	v_k
e_1	$\frac{a_{11}a_{ij}-a_{1j}a_{i1}}{a_{ij}}$	$\dots$	$-\frac{a_{1j}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\frac{a_{1k}a_{ij}-a_{ik}a_{1j}}{a_{ij}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_i	$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\frac{1}{a_{ij}}$	$\dots$	$\frac{a_{ik}}{a_{ij}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_n	$\frac{a_{n1}a_{ij}-a_{i1}a_{nj}}{a_{ij}}$	$\dots$	$-\frac{a_{nj}}{a_{ij}}$	$\dots$	$\frac{a_{nk}a_{ij}-a_{ik}a_{nj}}{a_{ij}}$

Tartalom

1. feladat

Feladat

Adott egy e_1, e_2, e_3 bázis, illetve a

$$v_1 = (1, -2, 1)\,, \; v_2 = (0, 3, 1)\,, \; v_3 = (-1, -1, 1)$$

vektorok. Vigyünk be annyi vektort a v_1, v_2, v_3 vektorok közül a bázisba, amennyit csak tudunk!

Megoldás

Írjuk fel a bázistranszformációhoz szükséges táblázatot, és hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat, ameddig lehetséges.

1. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3
e_1	1	0	-1
e_2	-2	3	-1
e_3	$\boxed{1}$	1	1

1. feladat

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 \\
\hline
e_1 & 1 & 0 & -1 \\
e_2 & -2 & 3 & -1 \\
e_3 & \boxed{1} & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|ccc|}
 & e_3 & v_2 & v_3 \\
\hline
e_1 & -1 & -1 & -2 \\
e_2 & 2 & 5 & \boxed{1} \\
v_1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

1. feladat
Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc|} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & -1 \\ e_2 & -2 & 3 & -1 \\ e_3 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc|} & e_3 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & -1 & -1 & -2 \\ e_2 & 2 & 5 & \boxed{1} \\ v_1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & e_3 & v_2 & e_2 \\ \hline e_1 & 3 & \boxed{9} & 2 \\ v_3 & 2 & 5 & 1 \\ v_1 & -1 & -4 & -1 \\ \hline \end{array}$$

1. feladat
Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & -1 \\ e_2 & -2 & 3 & -1 \\ e_3 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc} & e_3 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & -1 & -1 & -2 \\ e_2 & 2 & 5 & \boxed{1} \\ v_1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} & e_3 & v_2 & e_2 \\ \hline e_1 & 3 & \boxed{9} & 2 \\ v_3 & 2 & 5 & 1 \\ v_1 & -1 & -4 & -1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc} & e_3 & e_1 & e_2 \\ \hline v_2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ v_3 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ v_1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}$$

1. feladat

Megoldás

	v_1	v_2	v_3
e_1	1	0	-1
e_2	-2	3	-1
e_3	$\boxed{1}$	1	1

$\rightsquigarrow$

	e_3	v_2	v_3
e_1	-1	-1	-2
e_2	2	5	$\boxed{1}$
v_1	1	1	1

$\rightsquigarrow$

	e_3	v_2	e_2
e_1	3	$\boxed{9}$	2
v_3	2	5	1
v_1	-1	-4	-1

$\rightsquigarrow$

	e_3	e_1	e_2
v_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
v_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$
v_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$

- Mindegyik vektort be tudtuk vinni a bázisba.
- Ebből tulajdonképpen következik az is, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok is bázist alkotnak, mert egy bázist teljesen kicseréltünk ezekre a vektorokra, és a bázistranszformációk során mindig bázist kaptunk.

Tartalom

2. feladat

Feladat

Adott egy e_1, e_2, e_3, e_4 bázis, illetve a

$$v_1 = (1, 1, 0, 2), \qquad v_2 = (1, 2, -2, 1),$$
$$v_3 = (-2, -3, 1, -4), \qquad v_4 = (0, 1, 3, 4)$$

vektorok. Mennyi a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja?

Megoldás

Írjuk fel a bázistranszformációhoz szükséges táblázatot, és hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat, ameddig lehetséges. A bázisba bevitt v vektorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

2. feladat

Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	$\boxed{1}$	1	−2	0
e_2	1	2	−3	1
e_3	0	−2	1	3
e_4	2	1	−4	4

2. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	$\boxed{1}$	1	-2	0
e_2	1	2	-3	1
e_3	0	-2	1	3
e_4	2	1	-4	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	-2	0
e_2	-1	1	-1	1
e_3	0	-2	$\boxed{1}$	3
e_4	-2	-1	0	4

2. feladat
Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	$\boxed{1}$	1	-2	0
e_2	1	2	-3	1
e_3	0	-2	1	3
e_4	2	1	-4	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	-2	0
e_2	-1	1	-1	1
e_3	0	-2	$\boxed{1}$	3
e_4	-2	-1	0	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	-3	2	6
e_2	-1	-1	1	4
v_3	0	-2	1	3
e_4	-2	$\boxed{-1}$	0	4

2. feladat

Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	$\boxed{1}$	1	-2	0
e_2	1	2	-3	1
e_3	0	-2	1	3
e_4	2	1	-4	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	-2	0
e_2	-1	1	-1	1
e_3	0	-2	$\boxed{1}$	3
e_4	-2	-1	0	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	-3	2	6
e_2	-1	-1	1	4
v_3	0	-2	1	3
e_4	-2	$\boxed{-1}$	0	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	e_4	e_3	v_4
v_1	7	-3	2	-6
e_2	1	-1	1	0
v_3	4	-2	1	-5
v_2	2	-1	0	-4

2. feladat

Megoldás

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	$\boxed{1}$	1	−2	0
e_2	1	2	−3	1
e_3	0	−2	1	3
e_4	2	1	−4	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	−2	0
e_2	−1	1	−1	1
e_3	0	−2	$\boxed{1}$	3
e_4	−2	−1	0	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	−3	2	6
e_2	−1	−1	1	4
v_3	0	−2	1	3
e_4	−2	$\boxed{-1}$	0	4

$\rightsquigarrow$

	e_1	e_4	e_3	v_4
v_1	7	−3	2	−6
e_2	1	−1	1	0
v_3	4	−2	1	−5
v_2	2	−1	0	−4

- Nem tudunk több generálóelemet választani, így csak 3 vektort tudunk bevinni a bázisba. Ebből következik, hogy a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 3.
- A bázisba bevitt v vektorok megadják a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer egy maximálisan független részrendszerét.

2. feladat

Megoldás

Tipp: a generálóelem oszlopára nincs szükség, mert amit kihoztunk a bázisból, azt már nem akarjuk visszavinni. Így az új táblázatban a generálóelem oszlopa elhagyható.

$$\begin{array}{c|cccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \\ e_2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ e_3 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ e_4 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|ccc|} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & -2 & 0 \\ e_2 & 1 & -1 & 1 \\ e_3 & -2 & \boxed{1} & 3 \\ e_4 & -1 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c|cc|} & v_2 & v_4 \\ \hline v_1 & -3 & 6 \\ e_2 & -1 & 4 \\ v_3 & -2 & 3 \\ e_4 & \boxed{-1} & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c|} & v_4 \\ \hline v_1 & -6 \\ e_2 & 0 \\ v_3 & -5 \\ v_2 & -4 \\ \hline \end{array}$$

Tartalom

1. Elmélet
   - Gyakorlati végrehajtás

2. Alkalmazások
   - Vektor bevitele a bázisba
   - Rangszámítás
   - Lineáris egyenletrendszer megoldása
   - Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

3. feladat

Feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Megoldás

Írjuk fel a bázistranszformációhoz szükséges táblázatot, és hajtsunk végre elemi bázistranszformációkat, ameddig lehetséges.
Fontos, hogy itt el kell hagyni a generálóelem oszlopát, az előbb a rangszámításnál ez csak lehetőség volt.

3. feladat
Megoldás

A bázistranszformációk során a következőkre kell figyelni!

- Generálóelemet csak a középső részből választhatunk, a konstansok oszlopából nem.
- Ettől függetlenül természetesen a jobb oldali oszlop elemeit is le kell cserélni a bázistranszformáció szabályai szerint.
- Ha egy sor csupa-nulla ÉS valamilyen *e* jelzéssel kezdődik a sora, akkor ez a sor elhagyható a táblázatból.

3. feladat
Megoldás

A végeredmény kiértékelése a következő:

1. Ha van olyan sor, ami e-s jelzéssel kezdődik, és a jobb oldali oszlopban álló számon kívül minden eleme nulla, akkor az egyenletrendszer ellentmondó, ilyenkor nincs megoldás. (Nem kell a végéig várni, ha útközben találunk ilyet, akkor már megállhatunk azzal a megállapítással, hogy nincs megoldás.)
2. Ha nincs ellenmondó sor, akkor van megoldás:
    1. Ha minden x-es változót be tudtunk vinni a bázisba, akkor pontosan egy megoldás van. (Ilyenkor a bázistranszformáció végén csak 1 darab számokból álló oszlop van, ami a jobb oldali konstansoknak felel meg. A megoldást úgy kapjuk, hogy a sorok elején álló változók a sorukban lévő (egyetlen) számot veszik fel.
    2. Ha nem tudunk bevinni minden változót a bázisba, akkor végtelen sok megoldás van. Ezt az esetet az előbbi konkrét feladat megoldása után folytatjuk.

3. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	x_4	
e_1	$\boxed{1}$	1	2	4	-3
e_2	1	3	3	-1	-1
e_3	2	6	6	-5	3
e_4	1	3	3	2	-6

3. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	x_4	
e_1	$\boxed{1}$	1	2	4	-3
e_2	1	3	3	-1	-1
e_3	2	6	6	-5	3
e_4	1	3	3	2	-6

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	2	4	-3
e_2	2	1	-5	2
e_3	4	2	-13	9
e_4	2	$\boxed{1}$	-2	-3

3. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	x_4	
e_1	$\boxed{1}$	1	2	4	−3
e_2	1	3	3	−1	−1
e_3	2	6	6	−5	3
e_4	1	3	3	2	−6

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	2	4	−3
e_2	2	1	−5	2
e_3	4	2	−13	9
e_4	2	$\boxed{1}$	−2	−3

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_4	
x_1	−3	8	3
e_2	0	$\boxed{-3}$	5
e_3	0	−9	15
x_3	2	−2	−3

3. feladat

Megoldás

	x_1	x_2	x_3	x_4	
e_1	$\boxed{1}$	1	2	4	-3
e_2	1	3	3	-1	-1
e_3	2	6	6	-5	3
e_4	1	3	3	2	-6

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	2	4	-3
e_2	2	1	-5	2
e_3	4	2	-13	9
e_4	2	$\boxed{1}$	-2	-3

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_4	
x_1	-3	8	3
e_2	0	$\boxed{-3}$	5
e_3	0	-9	15
x_3	2	-2	-3

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	-3	$\frac{49}{3}$
x_4	0	$-\frac{5}{3}$
e_3	0	0
x_3	2	$-\frac{19}{3}$

3. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	x_4	
e_1	$\boxed{1}$	1	2	4	-3
e_2	1	3	3	-1	-1
e_3	2	6	6	-5	3
e_4	1	3	3	2	-6

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	2	4	-3
e_2	2	1	-5	2
e_3	4	2	-13	9
e_4	2	$\boxed{1}$	-2	-3

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_4	
x_1	-3	8	3
e_2	0	$\boxed{-3}$	5
e_3	0	-9	15
x_3	2	-2	-3

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	-3	$\frac{49}{3}$
x_4	0	$-\frac{5}{3}$
e_3	0	0
x_3	2	$-\frac{19}{3}$

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	-3	$\frac{49}{3}$
x_4	0	$-\frac{5}{3}$
x_3	2	$-\frac{19}{3}$

3. feladat
Megoldás

	x_2	
x_1	-3	$\frac{49}{3}$
x_4	0	$-\frac{5}{3}$
x_3	2	$-\frac{19}{3}$

Nem tudtunk minden változót bevinni a bázisba, tehát végtelen sok megoldás van.
A megoldást a következőképp olvassuk le:

3. feladat
Megoldás

	x_2	
x_1	-3	$\frac{49}{3}$
x_4	0	$-\frac{5}{3}$
x_3	2	$-\frac{19}{3}$

Nem tudtunk minden változót bevinni a bázisba, tehát végtelen sok megoldás van.
A megoldást a következőképp olvassuk le:

- A bázisba bevitt változók a kötött ismeretlenek, amiket nem tudtunk bevinni, azok a szabad ismeretlenek.
- A második függőleges vonal jelenti az " $=$ "-jelet, tehát a megoldás a következőképp olvasható le:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= \frac{49}{3} \\ x_4 &= -\frac{5}{3} \\ x_3 + 2x_2 &= -\frac{19}{3}. \end{aligned}$$

3. feladat
Megoldás

- A szabad ismeretleneket rendezzük a jobb oldalra:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 + \frac{49}{3} \\ x_4 &= -\frac{5}{3} \\ x_3 &= -2x_2 - \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

- A feladat megoldása:

$$\left(3x_2 + \frac{49}{3}, x_2, -2x_2 - \frac{19}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Tartalom

4. feladat

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha az egyenletrendszer jobb oldali konstansokból álló oszlopában minden elem nulla.

Feladat

Oldjuk meg az alábbi (homogén) lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -8x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás

Ugyanúgy járunk el, mint az előbb, a homogén egyenletrendszer csak abban különbözik egy átlagos egylenletrendszertől, hogy biztos van megoldása.

4. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	
e_1	$\boxed{2}$	7	3	0
e_2	3	-2	-3	0
e_3	-8	-3	3	0

4. feladat

Megoldás

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
e_1 & \boxed{2} & 7 & 3 & 0 \\
e_2 & 3 & -2 & -3 & 0 \\
e_3 & -8 & -3 & 3 & 0 \\
\hline
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{c|cc|c}
 & x_2 & x_3 & \\
\hline
x_1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\
e_2 & -\frac{25}{2} & \boxed{-\frac{15}{2}} & 0 \\
e_3 & 25 & 15 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

4. feladat
Megoldás

	x_1	x_2	x_3	
e_1	$\boxed{2}$	7	3	0
e_2	3	-2	-3	0
e_3	-8	-3	3	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	
x_1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
e_2	$-\frac{25}{2}$	$\boxed{-\frac{15}{2}}$	0
e_3	25	15	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	$\left[\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0
e_3	$\left[25\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-15\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0

4. feladat

Megoldás

	x_1	x_2	x_3	
e_1	$\boxed{2}$	7	3	0
e_2	3	-2	-3	0
e_3	-8	-3	3	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	
x_1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
e_2	$-\frac{25}{2}$	$\boxed{-\frac{15}{2}}$	0
e_3	25	15	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	$\left[\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0
e_3	$\left[25\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-15\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	1	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0
e_3	0	0

4. feladat

Megoldás

	x_1	x_2	x_3	
e_1	$\boxed{2}$	7	3	0
e_2	3	-2	-3	0
e_3	-8	-3	3	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	x_3	
x_1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
e_2	$-\frac{25}{2}$	$\boxed{-\frac{15}{2}}$	0
e_3	25	15	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	$\left[\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0
e_3	$\left[25\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)-15\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)$	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	1	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0
e_3	0	0

$\rightsquigarrow$

	x_2	
x_1	1	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0

4. feladat
Megoldás

	x_2	
x_1	1	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0

A megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= -\frac{5}{3}x_2, \end{aligned}$$

azaz vektoros formában megadva:

$$\left(-x_2, x_2, -\frac{5}{3}x_2\right).$$

4'. feladat

Feladat

Adjuk meg az előző feladatban lévő homogén egyenletrendszerhez tartozó megoldásaltér egy bázisát!

4'. feladat

Feladat

Adjuk meg az előző feladatban lévő homogén egyenletrendszerhez tartozó megoldásaltér egy bázisát!

- A megoldás vektoros formában: $\left(-x_2, x_2, -\frac{5}{3}x_2\right)$.
- A megoldásaltér dimenziója pontosan a szabad ismeretlenek számával egyezik meg, jelen példánál ez 1.
- A következő módon kaphatjuk meg a megoldásaltér egy bázisát (fundamentális rendszert): minden egyes szabad változóhoz megadunk egy olyan megoldásvektort, melyben az adott szabad ismeretlent 1-nek választjuk, a többit 0-nak.
- Jelen esetben egy vektort kapunk mint bázis, mert csak 1 darab szabadismeretlen van:

$$\left(-1, 1, -\frac{5}{3}\right).$$

4''. feladat

Feladat

Adjuk meg azon homogén egyenletrendszerhez tartozó megoldásaltér egy bázisát, melynek általános megoldása:

$$(3x_4 - x_5, -x_4 + x_5, 3, x_4, x_5).$$

4''. feladat

Feladat

Adjuk meg azon homogén egyenletrendszerhez tartozó megoldásaltér egy bázisát, melynek általános megoldása:

$$(3x_4 - x_5, -x_4 + x_5, 3, x_4, x_5)\,.$$

- A megoldásaltér dimenziója pontosan a szabad ismeretlenek számával egyezik meg, jelen példánál ez 2.
- Ezért két darab bázisvektort kell megadnunk, az előző dián említett módszerrel:

$$x_4 = 1,\ x_5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = (3, -1, 3, 1, 0)$$

$$x_4 = 0,\ x_5 = 1 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = (-1, 1, 3, 0, 1)$$

- Így a v_1, v_2 vektorok bázist alkotnak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterében.