

9. feladatsor – Vektorok

9.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok belső (skaláris) szorzatát, illetve vektoriális szorzatát.

(a) $\underline{a} = (1, -2, 3), \underline{b} = (2, -4, 1);$

(b) $\underline{a} = (-1, 4, 2), \underline{b} = (1, -5, 3);$

9.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő \mathbb{R}^n vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4), \underline{b} = (1, -2);$

(b) $\underline{a} = (1, 2, 4), \underline{b} = (3, 5, 1);$

(c) $\underline{a} = (1, 2, -3), \underline{b} = (4, 1, 0), \underline{c} = (0, 0, 0);$

(d) $\underline{a} = (1, -2, 4), \underline{b} = (2, -3, 1), \underline{c} = (-4, 5, 5);$

(e) $\underline{a} = (1, 2, 4), \underline{b} = (3, 5, 1), \underline{c} = (4, 3, -2), \underline{d} = (-1, 4, -3);$

(f) $\underline{a} = (1, 2, -1), \underline{b} = (3, 1, 4), \underline{c} = (2, 3, -1);$

(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4), \underline{b} = (0, -3, 1, 2), \underline{c} = (2, -4, 5, 9).$

9.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a megfelelő \mathbb{R}^n vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3), \underline{b} = (x, -6);$

(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2), \underline{b} = (-1, 4, -2, -4), \underline{c} = (3, -12, x, 10);$

(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1), \underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1), \underline{c} = (1, 9, -11, -4, x);$

(d) $\underline{a} = (1, -1, 2), \underline{b} = (2, -1, -1), \underline{c} = (1, 0, a^2), \underline{d} = (2, -1, a + 4).$

9.4. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterét, valamint adjuk meg a megoldáster egy bázisát.

(a)

(b)

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

9.5. Feladat. Döntsük el, hogy a következő halmazok alteret alkotnak-e a megfelelő \mathbb{R}^n -ben. Ha igen, akkor adjuk meg az alter dimenzióját.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = z, y + z = x\};$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 2\};$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\};$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\};$

(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$

9.6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit, majd adjunk meg bázist a sajátértékekhez tartozó sajátalterekhez.

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$