

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva határozzuk meg az alábbi műveletek végeredményét:

(a) i^{2011} ; i^{-22} ; (b) $(3 + 5i)(2 - 7i)$; (c) $(\overline{-6 + 9i} + 4 - 8i) \cdot i$; (d) $\frac{-7 - i}{1 + 4i}$; (e) $\frac{1 + 3i}{3 + 2i}$;
(f) $\frac{(-2 + 3i)(8 + i)}{(-4 - 7i)(1 - i)}$; (g) $\frac{\operatorname{Re}(3 + 5i) - (4 - 2i)}{(3 - 2i) + \operatorname{Im}(6 + i)}$.

6.2. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) 3; (b) -5 ; (c) i ; (d) $-8i$; (e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; (f) $1 - i$; (g) $2 - 2\sqrt{3}i$; (h) $-\sqrt{3} - i$.

6.3. Feladat. Az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat írjuk át kanonikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon:

(a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$; (b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$; (c) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; (d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$; (e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$; (f) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$; (g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$.

6.4. Feladat. Trigonometrikus vagy exponenciális alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét:

(a) $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$; (b) $\frac{1 - i}{1 + i}$; (c) $\frac{(-1 - i)(\sqrt{3} + i)}{(-1 + i)(-\sqrt{3} + i)}$; (d) i^{14} ; (e) $(\sqrt{3} - i)^{67}$; (f) $(1 + i)^{1222}$; (g) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$.

6.5. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

(a) $\sqrt{-4}$; (b) $\sqrt[3]{-8}$; (c) $\sqrt[4]{i}$; (d) $\sqrt[6]{64}$; (e) $\sqrt[3]{-8i}$; (f) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$.

6.6. Feladat. Számoljuk ki és ábrázoljuk Gauss-féle számsíkon a

(a) harmadik (b) negyedik (c) hatodik (d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezősz felbontásukat is.

(a) $x^2 + 6x + 10$

(b) $2x^3 + 16i$

(c) $x^3 + 8$

(d) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$

6.8. Feladat. Határozzuk meg, hogy mi lesz az osztás maradéka, ha az f polinomot elosztjuk a g polinommal. Ahol lehet, Horner-elrendezés segítségével számoljunk.

(a) $f = x^3 + x^2 - 2x + 10, g = x + 3;$

(b) $f = x^3 - 7x^2 + 9x + 5, g = x - 5;$

(c) $f = 3x^3 + x^2 - x + 3, g = x + 1;$

(d) $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7x - 3, g = x^2 + 2x + 1.$

6.9. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

(a) $A(-1, 1), B(2, 4), C(3, 9);$

(b) $A(1, 3), B(2, 8), C(4, 12);$

(c) $A(-1, 2), B(0, 0), C(1, 4), D(4, 0).$