# 4. feladatsor – Relációk

**4.1. Feladat.** Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \text{ és } \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

$$\alpha \cap \beta, \qquad \alpha \setminus \beta, \qquad \alpha^{-1}, \qquad \alpha\beta, \qquad \beta\alpha, \qquad \beta\alpha^{-1}, \qquad \beta \cap \alpha^{-1}.$$

**4.2. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi $\alpha$ és $\beta$ relációk esetén az $\alpha^{-1}$, $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációkat. (Az $\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

**(a)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon y \text{ az } x \text{ apja}\}$
**(b)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2^y\}$
**(c)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - 1 = 3x\}$

**4.3. Feladat.** Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(a, b) \colon a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

**4.4. Feladat.** Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

**(a)** reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
**(b)** antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
**(c)** dichotom de nem reflexív.

**4.5. Feladat.** Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

**(a)** $\{(a, b) \colon |a - b| \leq 2\}$ a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
**(b)** $\{(x, y) \colon x \leq y\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**(c)** $\{(x, y) \colon x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**(d)** $\{(a, b) \colon ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**(e)** $\{(a, b) \colon a^2 \geq b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**(f)** $\{(x, y) \colon |x| = |y|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**(g)** $\{(x, y) \colon 2 \mid x + y\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon
**(h)** $\{(a, b) \colon 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**(i)** $\{(a, b) \colon a^2 < b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**(j)** $\{(X, Y) \colon X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon

**4.6. Feladat.** Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

**4.7. Feladat.** Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

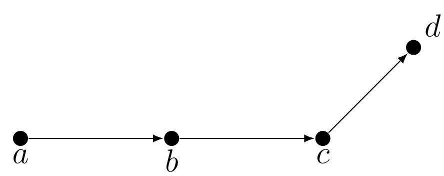
**(a)** $\{(a, b) \colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
**(b)** $\{(a, b) \colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon

**(c)** $\{(H, G) \colon |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon
**(d)** $\{(x, y) \colon x$-nek és $y$-nak van közös prímosztója$\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon
**(e)** $\{(x, y) \colon x$ és $y$ számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon
**(f)** $\{(a, b) \colon |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**(g)** $\{(x, y) \colon x^2 + y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

**4.8. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

**(a)** $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$
**(b)** $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
**(c)** $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$
**(d)** $(D; |)$, ahol $D = \{0, 1, 2, 4, 7, 14, 28, 32\}$
**(e)** $(E; \sqsubseteq)$, ahol $E = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha $a$ minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint $b$ megfelelő számjegye
**(f)** $(F; \leq)$, ahol $F = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés

**4.9. Feladat.** Adjuk meg a következő gráf által meghatározott $\rho$ reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, reflexív és tranzitív lezártját.




**4.10. Feladat.** Legyen $\rho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a $\rho$ gráfját és adjuk meg (ne csak a gráfjával)

**(a)** $\rho$ reflexív lezártját;
**(b)** $\rho$ szimmetrikus lezártját;
**(c)** $\rho$ tranzitív lezártját;
**(d)** $\rho$ reflexív és tranzitív lezártját.

**4.11. Feladat.** Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

**(a)** $\{(a, b) \in A^2 \colon |a - b| = 2\}$, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
**(b)** $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \colon a - b = 0\}$;
**(c)** $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon b = a^2\}$;
**(d)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - x = 1\}$.