# 3. feladatsor – Halmazok

**3.1. Feladat.** Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(a)** $\emptyset \in A$ | **(c)** $\{\emptyset\} \in A$ | **(e)** $\{\{\emptyset\}\} \in A$ | **(g)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ |
| **(b)** $\emptyset \subseteq A$ | **(d)** $\{\emptyset\} \subseteq A$ | **(f)** $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ | **(h)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ |

**3.2. Feladat.** Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \triangle B, \quad (A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad \mathcal{P}(B).$$

**3.3. Feladat.** Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B.$$

**3.4. Feladat.** Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

**3.5. Feladat.** Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az $A$ halmaznak.

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$
(f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$

**3.6. Feladat.** Adjunk meg az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

(a) legalább 3 osztálya van;
(b) pontosan 3 osztálya van;
(c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
(d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

**3.7. Feladat.** Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges $A, B, C$ halmazok esetén a következő egyenlőségek.

(a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$
(b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$
(c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$
(g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

**3.8. Feladat.** Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az $A, B, C, D$ halmazok és komplementereik segítségével.

**3.9. Feladat.** Van-e olyan $A, B, C$ halmaz, melyre $A \subseteq B \in C$ és $A \in B \subseteq C$ is teljesül?

**3.10. Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan $A, B$ halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

**(a)** $A \subseteq B$ **(b)** $A = B$ **(c)** $B \setminus A = \emptyset$

**3.11. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B, C, D$ halmazokra teljesül, hogy

**(a)** $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$;
**(b)** $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq (A \cap C \cap D)$.

**3.12. Feladat.** Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen $A$ és $B$ az $U$ univerzum részhalmaza, és legyen $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$. Igazoljuk, hogy $\overline{A} = A \sqcap A$ és $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$. Hogyan fejezhető ki az egyesítés a $\sqcap$ művelet segítségével?

**3.13. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi $A$ és $B$ halmazok esetén $A \times B$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

**(a)** $A = \{1, 3\},\ B = \{-1, 0, 2\}$
**(b)** $A = \{1, 3\},\ B = [1; 3)$
**(c)** $A = (-1; 2],\ B = [1; 3)$

**3.14. Feladat.** Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?