2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat. Jelölje $M(x)$ az „*x négyzetszám*”, $P(x)$ az „*x páros szám*”, $O(x, y)$ az „*x osztója y-nak*”, $N(x)$ az „*x negatív szám*” predikátumokat, individuumtartomány az egész számok halmaza. Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

(a) $P(7)$
(b) $M(4) \wedge \neg N(9+3)$
(c) $(\forall x)(O(2, 4 \cdot x))$
(d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$
(e) $(\forall x)(O(4, x) \to P(x))$
(f) $(\forall x)\Big(M(x) \to (\exists y)\big(P(y) \wedge O(x, y)\big)\Big)$
(g) $(\exists x)\bigg(P(x) \wedge (\forall y)\Big(\big(P(y) \wedge N(y)\big) \to \big(\neg O(y, x)\big)\Big)\bigg)$

2.2. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P\big(f(x, a), x\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y, x), y\big) \wedge Q(x)\Big).$$

2.3. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*”,	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$B(x, y)$: „*x az y barátja*”,	$C(x, y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,
$T(x, y)$: „*x házatársa y-nak*”,	$F(x)$: „*x férfi*”,
$A(x)$: „*x anya*”,	p: „*Péter*”,
$a(x)$: „*x anyja*”,	$S(x)$: „*x szeret főzni*”.

(a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
(b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
(c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
(d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
(e) *Vannak nőtlen férfiak.*
(f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
(g) *Péter összes barátja hallgató.*
(h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
(i) *Péter anyja szeret főzni.*

2.4. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

(a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
(b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
(c) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*

(d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
(e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

2.5. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

(a) *Minden informatikus éhes.*
(b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
(c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*
(d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
(e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
(f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
(g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

2.6. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e az alábbi formulák az $(A; N, K, P)$ interpretációnál, ahol $A = \mathbb{Z}$, N a négyzetszámok, K a köbszámok, P pedig a prímszámok halmaza.

(a) $\big((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)\big) \to (\exists x)(N(x) \wedge K(x))$
(b) $(\exists x)(N(x) \vee P(x)) \to \big((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x)\big)$

2.7. Feladat. Döntsük el, hogy tautológiák-e a következő formulák.

(a) $(\forall x)(\forall y)A(x,y) \to (\forall x)A(x,x)$
(b) $\big((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
(c) $\big((\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)\big) \to (\exists x)(A(x) \vee B(x))$
(d) $\neg(\exists x)(\forall y)\big((\neg A(x)) \vee (\neg B(y))\big) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$