Absztrakt algebra

(2017. február 23.)

Bogya Norbert, Kátai-Urbán Kamilla

1. Művelet

1. Definíció. Legyen A egy nemüres halmaz, $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor az $A^n \to A$ leképezéseket A-n értelmezett n-változós műveleteknek nevezzük.

A Számelmélet előadásvázlatban definiáltuk (43. definíció) a modulo m maradékosztályok halmazát ($\mathbb{Z}_m$).

2. Tétel. A $\mathbb{Z}_m$ halmazon művelet a következőképpen definiált összeadás, kivonás és szorzás:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \qquad \overline{a} - \overline{b} = \overline{a-b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

3. Példa. A $\mathbb{Z}_{12}$ halmazon $\overline{5} + \overline{9} = \overline{14} = \overline{2}$, $\overline{5} - \overline{9} = \overline{-4} = \overline{8}$, $\overline{5} \cdot \overline{9} = \overline{45} = \overline{9}$.

4. Példa.

(1) Az $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ logikai értékek halmazán a $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ leképezések 2-változós műveletek, míg a negáció 1-változós művelet.
(2) Az egész számok halmazán az összeadás, szorzás 2-változós, az abszolútértékképzés vagy a négyzetre emelés 1-változós műveletek.
(3) Halmazok esetén az $\cup, \cap, \setminus$ leképezések 2-változós, míg a komplementerképzés 1-változós művelet.
(4) A valós számok halmazán a sin, cos, exp függvények 1-változós műveletek.
(5) A valós számok halmazán a reciprok képzése nem művelet, mert nem leképezés. (Egy $f\colon A \to B$ megfeleltetés leképezés, ha minden $a \in A$ elemhez tartozik egy $b \in B$ elem, melyre $af = f(a) = b$.)
(6) Az egész számok halmazán a $-$ jelölhet 2-változós, vagy 1-változós műveletet is, értelemszerűen kell hivatkoznunk, mikor melyiket használjuk.
(7) A 0-változós művelet is megengedett a definícióban: az A halmaz egy 0-változós művelete az A egy rögzített elemének kijelölése. Például az egész számok halmazán az 1 egy 0-változós művelet.

Egy művelet meg lehet adni művelettáblázattal is.

5. Példa. Az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon definiáljunk egy $+$-szal jelölt műveletet a következő művelettábla szerint:

+	1	2	3	4	5
1	1	2	5	2	1
2	3	2	1	4	5
3	1	1	2	3	4
4	4	2	1	1	1
5	3	1	1	3	5

A fenti táblázat definiálja a műveletet, például $2 + 5 = 5$, $5 + 2 = 1$ és $4 + 4 = 1$.

6. Definíció. Egy $(A; F)$ párt algebrának nevezünk, ha A egy nemüres halmaz, F pedig A-n értelmezett műveletek egy halmaza. Ha F-nek kevés eleme van, akkor F helyett a konkrét műveleteket soroljuk fel.

7. Példa. Példák algebrákra: $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_m; +, \cdot)$ $(\mathbb{R}; +, \cdot)$, $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \vee)$.

Az algebrákat a műveleteik számával és ezen műveletek tulajdonsága szerint osztályozhatjuk. A következőben megvizsgálunk néhány speciális algebrai struktúrát és néhány speciális tulajdonságú műveletet.

2. Grupoid, félcsoport, csoport

8. Definíció. A grupoid egy olyan algebra, melynek csak egyetlen kétváltozós művelete van.

9. Definíció. (Grupoid műveleti tulajdonságai)

(1) Az $(A;\circ)$ grupoid asszociatív, ha $\forall a,b,c\in A$-ra $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$.
(2) Az $(A;\circ)$ grupoid kommutatív, ha $\forall a,b\in A$-ra $a\circ b=b\circ a$.
(3) Az $(A;\circ)$ grupoidban van zéruselem, ha $\exists o\in A$ $\forall a\in A$-ra $a\circ o=o\circ a=o$.
(4) Az $(A;\circ)$ grupoidban van egységelem, ha $\exists e\in A$ $\forall a\in A$-ra $a\circ e=e\circ a=a$.
(5) Ha az $(A;\circ)$ grupoidban e egységelem, és $\forall a\in A$-ra $\exists b\in A$, amelyre $a\circ b=b\circ a=e$, akkor minden elemnek van inverze.
(6) Az $(A;\circ)$ grupoid kancellatív, ha $\forall a,b,c\in A$-ra $(a\circ b=a\circ c\Rightarrow b=c)$ és $(b\circ a=c\circ a\Rightarrow b=c)$.

10. Példa. A $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{C};\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ struktúrák grupoidok. Mindegyik egységelemes, az egységelemük rendre 0, 1, $\mathbf{i}$. A $(\mathbb{Z};+)$ nem zéruselemes, a másik kettő viszont igen, a 0 és a $\mathbf{h}$ zéruselemmel.

11. Tétel. Bármely grupoidban legfeljebb egy egységelem és legfeljebb egy zéruselem van.

12. Definíció. Az asszociatív grupoidokat félcsoportnak nevezzük. Az egységelmes félcsoportokat monoidnak nevezzük. Azokat a monoidokat, ahol minden elemnek van inverze csoportoknak hívjuk. A kommutatív csoportokat Abel-csoportoknak nevezzük.

13. Példa.

(1) Az $(\mathbb{N};+)$ félcsoport, de nem monoid.
(2) A következők monoidok, de nem csoportok: $(\mathbb{N};\cdot)$, $(\mathbb{N}_0;+)$, $(\mathbb{R};\cdot)$, $(\mathbb{R}^{n\times n};\cdot)$, $(\mathbb{Z}_n;\cdot)$, $(\mathcal{P}(U);\cup)$.
(3) Az $(\{\, M\in\mathbb{R}^{n\times n} : |M|\neq 0\,\};\cdot)$ algebra, azaz az $n\times n$-es invertálható valós mátrixok halmaza a szorzással csoportot alkot, de nem Abel-csoport.
(4) A következők Abel-csoportok: $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Z}_n;+)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\};\cdot)$, $(\mathbb{R}^{n\times m};+)$, $(\mathcal{P}(U);\triangle)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$.

14. Definíció. Egy $(A;\cdot)$ grupoidban az a,b elemek felcserélhetőek, ha $a\cdot b=b\cdot a$.

15. Tétel. Minden csoport kancellatív. Minden véges kancellatív félcsoport csoport.

16. Tétel. Az $(A;\cdot)$ monoidban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Ha az a,b elemnek van inverze: a^{-1},b^{-1}, akkor az a^{-1} és ab elemeknek is van inverze, mégpedig

(1) $(a^{-1})^{-1}=a$,
(2) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

17. Megjegyzés. Tudjuk, hogy csoportban az egységelem és az elemek inverze egyértelműen meghatározott, de nem mindig egyértelmű, hogy ezeket hogyan is jelöljük. Ha ezt meg szeretnénk adni, akkor a $(A;\cdot)$ helyett $(A;\cdot,{}^{-1},1)$-et írunk, ahol a második művelet az 1-változós inverzképzés, és 1 az egységelem (0-változós művelet). A csoportok multiplikatív írásmódja alatt a $(A;\cdot,{}^{-1},1)$ műveleti szimbólumokat értjük. Az additív írásmód alatt a $(A;+,-,0)$ műveleti szimbólumokat értjük, és általában csak akkor használjuk, ha a csoport kommutatív.

2.1. Hatványozás.

18. Definíció. Egy $(A;\cdot)$ félcsoportban az a^n hatvány $(n\geq 1)$ az a elemen a $\cdot$ művelet $(n-1)$-szeri elvégzését értjük, azaz

$$a^n=\underbrace{a\cdots a}_{n\text{ db}}.$$

19. Példa. Az $(\mathbb{R}\setminus\{0\};\cdot)$ csoportban az $a=2$ elem harmadik hatványa 8, mert $2\cdot 2\cdot 2=8$. Az $(\mathbb{R};+)$ csoportban az $a=2$ elem harmadik hatványa viszont 6, mert $2+2+2=6$.

20. Tétel. Egy $(A;\cdot)$ félcsoportban tetszőleges $a,b\in A$ és $m,n\in\mathbb{N}$ esetén

- $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
- $(a^m)^n=a^{mn}$;
- ha a és b felcserélhető, akkor $a^n\cdot b^n=(ab)^n$.

21. Definíció. Legyen a az $(A;\cdot)$ csoport egy eleme. Ekkor $a^0 = 1$, ha $n > 0$, akkor a^n-t ugyanúgy definiáljuk, mint félcsoportok esetén. Ha $n < 0$, akkor $a^n = (a^{-1})^{-n}$, ahol $-n$ már pozitív kitevő.

22. Tétel. Egy $(A;\cdot)$ csoportban tetszőleges $a, b \in A$ és $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- ha a és b felcserélhető, akkor $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

2.2. Elem rendje.

23. Definíció. Legyen $(A;\cdot)$ csoport. Az $a \in A$ elem rendje az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 1$. Ha ilyen nincs, akkor a rendje végtelen. Az elem rendjét $o(a)$-val jelöljük.

24. Példa. A $(\mathbb{Z}_6;+)$ csoportban $o(\overline{4}) = 3$, mert $3 \cdot \overline{4} = \overline{0}$, azaz a harmadik hatvány az egységelem, de a kisebb hatványok nem az egységelemet adják.

25. Tétel. Legyen $(A;\cdot)$ csoport, $a \in A$ véges rendű elem, és $n, m \in \mathbb{Z}$-re

(1) $a^n = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $o(a) \mid n$,
(2) $a^n = a^m$ akkor és csak akkor teljesül, ha $n \equiv m \pmod{o(a)}$.

26. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző tételnél az (1) speciális esete a (2)-nek $m = 0$-ra.

3. Gyűrű, test

27. Definíció. Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozó művelet az A halmazon. A $\circ$ disztributív a $\star$-ra nézve, ha $\forall a, b, c \in A$-ra $a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c)$ és $(b \star c) \circ a = (b \circ a) \star (c \circ a)$.

28. Példa. A valós számok halmazán a szorzás disztributív az összeadásra nézve. A $\cup$ és a $\cap$ műveletek is disztributívak egymásra, ahogy azt Diszkrét matematika I.-ből a halmazoknál tanultuk.

29. Definíció. Az $(A;+,\cdot)$ struktúrát gyűrűnek nevezzük, ha mindkét művelet kétváltozós, továbbá

- $(A;+)$ Abel-csoport (a gyűrű additív csoportja),
- $(A;\cdot)$ félcsoport (a gyűrű multiplikatív félcsoportja),
- a $\cdot$ művelet disztributív az $+$-ra.

30. Példa. Gyűrűk: $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2};+,\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow,\vee)$, $(\mathcal{P}(U);\triangle,\cap)$, $(\mathbb{Z}_5;+,\cdot)$.

A félcsoport jellemzőit átvehetjük a gyűrű jellemzésére is, így attól függően beszélhetünk kommutatív vagy egységelemes gyűrűről, hogy az $(A;+,\cdot)$ gyűrűhöz tartozó $(A;\cdot)$ félcsoport kommutatív vagy egységelemes.

31. Példa.

- A $(\mathbb{Z};+,\cdot)$ gyűrű egységelemes (1) és kommutatív.
- Az $(\mathbb{R}^{n\times n};+,\cdot)$ gyűrű egységelemes (egységmátrix), de nem kommutatív, ha $n \geq 2$.
- A $(\{\text{páros egészek}\};+,\cdot)$ gyűrű kommutatív, de nem egységelemes.

32. Definíció. Az $(A;+,\cdot)$ gyűrűt testnek nevezzük, ha az $(A \setminus \{0\};\cdot)$ Abel-csoportot alkot, amelyet a test multiplikatív csoportjának nevezzük.

33. Példa. A 30. példában felsorolt gyűrűk közül testek: $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow,\vee)$, $(\mathbb{Z}_5;+,\cdot)$.

34. Tétel. A $(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$ gyűrű pontosan akkor test, ha n prím.

4. Részalgebra

35. Definíció. Legyen $(A;F)$ egy algebra. Ha a $H \subseteq A$ nemüres halmaz zárt az F-beli műveletekre nézve, akkor a $(H;F)$ algebrát az $(A;F)$ részalgebrájának nevezzük.

36. Definíció. Legyen $(A;F)$ egy algebra. Ha $H \subseteq A$, akkor az A algebra H által generált részalgebráján a következőt értjük:

$$[H] = \{a \in A\colon a \text{ megkapható } H\text{-beli elemekből az } F \text{ műveletek véges számú alkalmazásával}\}.$$

A $H \subseteq A$ generátorrendszer, ha $[H] = A$.

37. Példa. Az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon definiáljunk egy $\circ$-val jelölt műveletet a következő művelettábla szerint:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	a	c
b	b	a	d	d
c	c	d	a	c
d	a	c	b	b

Ekkor $[a] = \{a\}$, $[b] = \{a, b\}$, $[c] = \{a, c\}$, és $[\{b, c\}] = \{a, b, c, d\} = A$, tehét a $\{b, c\}$ egy generátorrendszer.

38. Definíció. Grupoid részalgebrája grupoid, ezt részgrupoidnak nevezzük. Félcsoport részalgebrája félcsoport, ezt részfélcsoportnak nevezzük.

39. Példa. Az $(\mathbb{N}; +)$ részfélcsoportja az $(\mathbb{R}; +)$ félcsoportnak.

Általánosságban nem igaz, hogy a részalgebra megőrzi az eredeti struktúrát, ezért a továbbiakban a részalgebra definícióját módosítjuk, hogy a részcsoport, részgyűrű és résztest fogalmát bevezessük.

40. Definíció. Legyen $(G; \cdot)$ egy csoport. Ha H nemüres részhalmaza G-nek és

(1) H zárt a műveletre,
(2) H tartalmazza G egységelemét valamint
(3) H zárt az inverzképzésre,

akkor a $(H; \cdot)$ algebrát a $(G; \cdot)$ csoport részcsoportjának nevezzük.

41. Példa. A $(\mathbb{Z}; +)$ részcsoportja az $(\mathbb{R}; +)$ csoportnak. A $(\mathbb{Z}_8; +)$ csoportnak a $([\overline{6}]; +)$ részcsoportja, ahol $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$.

42. Definíció. Legyen $(R; +, \cdot)$ egy gyűrű. Ha S nemüres részhalmaza R-nek és

(1) S zárt a $+$ és $\cdot$ műveletre,
(2) S tartalmazza R additív egységelemét, valamint
(3) S tartalmazza minden elemének az additív inverzét is.

akkor az $(S; +, \cdot)$ algebrát az $(R; +, \cdot)$ gyűrű részgyűrűjének nevezzük.

43. Definíció. Legyen $(T; +, \cdot)$ egy test, akkor az olyan részgyűrűit, melyek önmagukban is testek, a $(T; +, \cdot)$ test résztesteinek nevezzük.

44. Példa. Az $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ testnek részgyűrűje a $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ gyűrű (de nem része teste), a $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ pedig résztestet alkot az $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ testben.

5. Lagrange-tétel

45. Definíció. Legyen $(G; \cdot)$ csoport, $(H; \cdot)$ egy részcsoportja és $g \in G$. A $Hg = \{hg \colon h \in H\}$ halmazt a g elem H szerinti jobb oldali mellékosztályának nevezzük. Hasonlóan definiálhatók a bal oldali mellékosztályok.

46. Példa. A $(\mathbb{Z}_8; +)$ csoport és $H = [\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, akkor az $\overline{1}$ elem H szerinti jobb oldali mellékosztálya: $H + \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Mivel $(\mathbb{Z}_8; +)$ csoport kommutatív, így a bal oldali és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek.

47. Definíció. Legyen $(G; \cdot)$ véges csoport és $(H; \cdot)$ egy részcsoportja, H indexe G-ben a G csoport H szerinti jobb (bal) oldali mellékosztályainak száma. Jele: $[G \colon H]$. A G elemszámát a G rendjének is szokás hívni.

48. Tétel (Lagrange-tétel). Ha $(G; \cdot)$ véges csoport és $(H; \cdot)$ tetszőleges részcsoportja, akkor $|G| = [G \colon H] \cdot |H|$.

49. Példa. A $(\mathbb{Z}_8; +)$ csoport a $H = [\overline{6}]$ esetén a $H + \overline{0}$ és $H + \overline{1}$ osztályokra bomlik, így $[\mathbb{Z}_8 \colon H] = 2$, valamint $|\mathbb{Z}_8| = 8$ és $|H| = 4$ (lásd:46. példa).

50. Következmény. Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztója a csoport rendjének.

51. Következmény. Véges csoport bármely elemének rendje osztója a csoport rendjének.

52. Példa. Az előző következmény alapján a $(\mathbb{Z}_7; +)$ csoportban a $\overline{0}$-n kívül minden elem rendje 7.

53. Definíció. Legyen $(G; \cdot)$ tetszőleges csoport, a $(H; \cdot)$ részcsoportja normálosztója $(G; \cdot)$-nek, ha bármely $g \in G$-re $gH = Hg$.

54. Tétel. Ha $(G; \cdot)$ Abel-csoport (kommutatív csoport), akkor bármely részcsoport normálosztó.

6. Homomorfizmus, kongruenciareláció, direkt szorzat

Diszkrét matematika I. tantárgyból a halmazokon definiáltuk a leképezés, ekvivalenciareláció és a Descartes-szorzat fogalmát. A következőkben algebrákon fogunk megadni hasonló definíciókat úgy, hogy a művelettel is „jól viselkedjenek”.

55. Definíció. Legyen $(A; \circ)$ és $(B; \star)$ két grupoid. A $\varphi\colon A \to B$ leképezést homomorfizmusnak nevezzük, ha φ felcserélhető a műveletekkel, azaz $\forall a_1, a_2 \in A$-ra $(a_1 \circ a_2)\varphi = a_1\varphi \star a_2\varphi$.

56. Definíció. A bijektív homomorfizmust izomorfizmusnak nevezzük. Az $(A; \circ)$ algebra izomorf a $(B; \star)$ algebrával, ha létezik közöttük izomorfizmus, jele $(A; \circ) \cong (B; \star)$.

57. Példa. $(\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (\mathbb{R}; +)$, mert a $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lg x$ leképezés izomorfizmus.

58. Megjegyzés. Természetesen a homomorfizmus nem csak grupoidokon, hanem tetszőleges algebrákon is értelmezhető, ehhez a két algebrának azonos típusúnak kell lennie, azaz egyforma számú és egyforma változószámú műveletet kell tartalmaznia. Az egymásnak megfelelő műveletekre érvényesnek kell lenni a felcserélhetőségnek. A fejezet többi algebrai struktúrái is értelmezhetők általánosan algebrákon, nem csak grupoidokon.

59. Definíció. Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid, $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, $\mathcal{C}$ pedig a hozzá tartozó osztályozás. A ϱ ekvivalenciarelációt kongruenciarelációnak nevezzük, ha $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$-ra $a_1 \varrho b_1,\ a_2 \varrho b_2 \Rightarrow (a_1 \circ a_2) \varrho (b_1 \circ b_2)$. A $\mathcal{C}$-t ekkor kompatibilis osztályozásnak nevezzük.

60. Példa. Az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon definiáljunk egy $\circ$-val jelölt műveletet a következő művelettábla szerint:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	a	b	a
c	c	d	a	b
d	c	d	b	b

Az A-n értelmezett $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ osztályozás kombatibilis osztályozás az $(A; \circ)$ algebrán, a hozzá tartozó ϱ ekvivalenciareláció pedig kongruenciareláció.

61. Definíció. Legyen $(A; \circ)$ grupoid, ϱ pedig egy kongruenciarelációja. Tetszőleges $a \in A$-ra jelölje $\overline{a}$ a ϱ reláció a-t tartalmazó osztályát. Az osztályok halmazát faktorhalmaznak nevezzük, és A/ϱ-val jelöljük, és a következőképp definiáljuk rajta a $\circ$ műveletet: $\forall a_1, a_2 \in A$-ra $\overline{a_1} \circ \overline{a_2} = \overline{a_1 \circ a_2}$. Az $(A/\varrho; \circ)$ algebrát az $(A; \circ)$ algebra ϱ szerinti faktoralgebrájának nevezzük.

62. Példa. A 60. példában megadott $(A; \circ)$ algebra és ϱ ekvivalenciareláció esetén az $A/\varrho = \{\overline{a}, \overline{c}\}$ faktorhalmazon $\circ$ művelet az alábbi művelettáblázattal adható meg:

$\circ$	$\overline{a}$	$\overline{c}$
$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$
$\overline{c}$	$\overline{c}$	$\overline{a}$

63. Példa. Ha a $\mathbb{Z}$ halmazon tekintjük a modulo 3 számelméleti kongruenciát, akkor a $(\mathbb{Z}; +)$ algebrán kongruenciarelációt kapunk, a faktoralgebra a $(\mathbb{Z}_3; +)$ algebra (lásd: 2. tétel).

64. Definíció. Tetszőleges A, B halmazok esetén a $\varphi\colon A \to B$ leképezés magján a

$$\ker\varphi = \{(a_1, a_2)\colon a_1\varphi = a_2\varphi\} \subseteq A \times A$$

relációt értjük.

65. Tétel (Homomorfiatétel). Legyenek $(A;\circ)$ és $(B;\star)$ grupoidok, és $\varphi\colon A \to B$ tetszőleges homomorfizmus, ekkor

(1) $\ker\varphi$ kongruenciareláció $(A;\circ)$-n;
(2) ha φ szürjektív, akkor $(B;\star) \cong (A/\ker\varphi;\circ)$.

66. Definíció. Legyenek $(A_1;\circ)$, $(A_2;\circ)$ és $(A_3;\circ)$ grupoidok. Az $A_1 \times A_2 \times A_3$ Descartes-szorzaton értelmezzük a $\circ$ műveletet a következőképpen $\forall(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ elemekre $(a_1,a_2,a_3)\circ(b_1,b_2,b_3) = (a_1\circ b_1, a_2\circ b_2, a_3\circ b_3)$. Az $(A_1 \times A_2 \times A_3;\circ)$ grupoidot az eredeti grupoidok direkt szorzatának nevezzük.

67. Megjegyzés. Az előző definíció grupoidok helyett más algebrákra is megadható, és nem csak három, hanem tetszőleges (véges) számú algebra esetén is érvényes.

68. Példa. A $(\mathbb{Z}_2;+)$ és $(\mathbb{Z}_3;+)$ grupoidok direkt szorzata esetén az alaphalmaz:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\},$$

az $+$ műveletet úgy végezzük el, hogy a megfelelő komponenseket összeadjuk az adott algebrában. A $(\mathbb{Z}_2 \times Z_3;+)$ grupoid izomorf a $(\mathbb{Z}_6;+)$ grupoiddal.